Математичні студії
1995, випуск 4

УДК 517.948

ПРО ГРАНИЦЮ ”РЕГУЛЯРИЗОВАНОГО РОЗВ’ЯЗКУ” НЕКОРЕКТНОЇ ЗАДАЧІ

Є.М. Доманський, А.М. Плічко

Abstract. E. Domanskii, A. Plichko. *On the limit of a ”regularized solution” of an ill-posed problem* // Matematychni Studii. **4** (1995) P.75–78.

An interpretation of the limit of a ”regularized solution” of a linear inverse problem with a linear regularizator is given in terms of strengthened B-solubility. The existence of linear regularizators which are not strengthenly B-solubles for any continuous linear operator B is shown.

Нехай X і Y – нормовані простори, а $L(X,Y)$ – простір лінійних неперервних операторів з X у Y. Розглянемо рівняння

$$Ax = y, \tag{1}$$

де оператор $A \in L(X,Y)$ не має обмеженого оберненого. Нехай Δ – деяка множина додатніх чисел, що має нуль граничною точкою.

Означення 1([1]). Сім’я відображень $R_\delta : Y \to X$, $\delta \in \Delta$, називається регуляризуючим алгоритмом (РА) рівняння (1), якщо $\sup\{||R_\delta y - x|| : y \in Y, ||y - Ax|| \le \delta\} \to 0$ при $\delta \to 0$ для всякого $x \in X$.

Для наближеного розв’язання рівняння (1) застосовують метод регуляризації [1,2], який грунтується на понятті регуляризуючого алгоритму. Там припускається, що при деякому $y_0 \in Y$ існує точний розв’язок рівняння (1). Але y_0 на практиці невідомий, а задано елемент $y_\delta \in Y$ і число $\delta > 0$ такі, що $||y_\delta - y_0|| \le \delta$. За наближений розв’язок рівняння береться елемент $y_\delta \in Y$. За означенням РА $R_\delta y_\delta \to x_0$ при $\delta \to 0$. Відмітною особливістю методу регуляризації є те, що потрібно знати не тільки елемент y_δ, а й число δ, щоб визначити $R_\delta y_\delta$. Як зазначали фахівці, на практиці пара (y_δ, δ) інколи відома нечітко; взагалі кажучи, немає впевненості, що $||y_\delta - y_0|| \le \delta$ (нагадаймо, що на практиці y_0 невідомий). Може виявитись, що для заданої пари вихідних даних (y_δ, δ) буде $||y_\delta - y|| \le \delta$ при деякому $y \in Y$ і $y \ne y_0$ (можливо, навіть $y \notin \mathcal{R}(A)$), а разом з тим для деякого РА ”регуляризований розв’язок” $R_\delta y_\delta$ збігається при $\delta \to 0$. Необхідно знати зміст границі $\lim_{\delta\to 0} R_\delta y_\delta$. У цій замітці дамо інтерпретацію границі ”регуляризованого розв’язку” $R_\delta y_\delta$, де R_δ, $\delta \in \Delta$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47N40, 65J20.

– довільний лінійний РА для рівняння (1), y_δ – деякий елемент з Y такий, що $||y_\delta - y|| \le \delta$, y – будь-який елемент з Y.

Для РА Тихонова [3] $R_\delta = A^*(AA^* + \delta E)^{-1} = (A^*A + \delta E)^{-1}A^*$, $\delta > 0$, границя "регуляризованого розв'язку" є розв'язком рівняння $A^*Ax = A^*y$ [3], еквівалентного рівнянню $Ax = y$, коли $Ker\, A^* = 0$ або $\overline{\mathcal{R}(A)} = Y$.

Якщо R_δ, $\delta \in \Delta$, – деякий M-регуляризуючий алгоритм [4] для рівняння (1), то за його означенням $y \in \mathcal{R}(A)$ і границя $\lim_{\delta\to 0} R_\delta y_\delta$ буде розв'язком рівняння $Ax = y$. Зазначимо, що РА і M-регуляризуючі алгоритми для рівняння (1) існують або не існують одночасно [5, Теор. 13].

Доведемо також, що для довільного лінійного РА R_δ, $\delta \in \Delta$, границя $\lim\limits_{\delta\to 0} R_\delta y_\delta$ буде розв'язком рівняння $BAx = By$ при деякому лінійному операторі B з властивостями: $\mathcal{D}(B) = Y$ і $Ker\, B \cap \mathcal{R}(A) = 0$. Нагадаємо, що лінійним регуляризатором для рівняння (1) називається сім'я операторів $R_\delta \in L(X, Y)$, $\delta \in \Delta$, таких, що $\forall x \in X\ \exists x_0 \in X$, $x - x_0 \in Ker\, A$: $R_\delta Ax \to x_0$ при $\delta \to 0$. Введемо означення [6].

Нехай Z – нормований простір, $A \in L(X, Y)$, B – довільний лінійний оператор з областю виначення $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{D}(B) \subset Y$ і образом $\mathcal{R}(B) \subset Z$; $M(R_\delta) = \{y \in Y : \exists x \in X, R_\delta y \to x, \delta \to 0\}$ – множина збіжності сім'ї лінійних операторів $R_\delta : Y \to X$, $\delta \in \Delta$.

Означення 2. Сім'я лінійних операторів $R_\delta : Y \to X$, $\delta \in \Delta$ називається B-розв'язною для рівняння (1) при заданому операторі B, якщо:
$y \in M(R_\delta) \Longleftrightarrow$ рівняння $BAx = By$ розв'язне.

Означення 3. Сім'я лінійних операторів $R_\delta : Y \to X$, $\delta \in \Delta$, називається підсилено B-розв'язною для рівняння (1) при заданому операторі B, якщо
1) $R_\delta y \to x$ при $\delta \to 0 \Longrightarrow BAx = By$;
2) рівняння $BAx = By$ розв'язне $\Longrightarrow y \in M(R_\delta)$.

Очевидно, що підсилено B-розв'язна сім'я для рівняння (1) буде B-розв'язною. Обернене твердження, взагалі кажучи, не є правильне. Наступна теорема дає необхідну й достатню умову, при якій сім'я лінійних операторів утворює лінійний регуляризатор. Вона є варіацією одного результату, анонсованого в [4].

Теорема 1. *Сім'я $R_\delta \in L(Y, X)$, $\delta \in \Delta$, X, Y – сепарабельні банахові простори, буде лінійним регуляризатором рівняння (1) тоді й тільки тоді, коли вона буде підсилено B-розв'язною для (1) при деякому лінійному операторі $B : Y \to X$ з $\mathcal{D}(B) = Y$ і $Ker\, B \cap \mathcal{R}(A) = 0$.*

Доведення. Необхідність. Оскільки $M_0(R_\delta) = \{y \in Y : \exists x \in Ker\, A, R_\delta y \to x$ при $\delta \to 0\}$ – лінійний підпростір, який перетинається з образом $\mathcal{R}(A)$ по нулю, то він має в Y алгебраїчне доповнення, що містить $\mathcal{R}(A)$. Простори X і Y мають однакові лінійні розмірності (потужності континуума). Тому існує лінійний оператор $B : Y \to X$ з $Ker\, B = M_0(R_\delta)$ і $Ker\, B \cap \mathcal{R}(A) = 0$. Покажемо, що регуляризатор (R_δ) підсилено B-розв'язний з цим B. Нехай $R_\delta y \to x$ при $\delta \to 0$. Оскільки $R_\delta Ax \to x_0$ при $\delta \to 0$ для деякого x_0 з умовою $x - x_0 \in Ker\, A$, то $R_\delta(y - Ax) \to x - x_0$ при $\delta \to 0$. Тому $y - Ax \in M_0(R_\delta)$, адже $x - x_0 \in Ker\, A$.

Перевіримо тепер умову 2 означення 3. Розв'язність рівняння $BAx = By$ означає, що $B(Ax - y) = 0$, тобто $Ax - y \in M_0(R_\delta)$. За умовою $R_\delta(Ax - y)$ та $R_\delta(Ax)$ збігаються, отже, й $R_\delta y$ збігається при $\delta \to 0$.

Достатність. Нехай $y = Ax$, $x \in X$; тоді $BAx = By$. З огляду на підсилену B-розв'язність сім'ї (R_δ) маємо $y \in M(R_\delta)$. Хай $R_\delta y \to x_0$ при $\delta \to 0$. Справджується рівність $BAx_0 = By$. Звідси, $BA(x - x_0) = 0$. Внаслідок рівності $Ker\, B \cap \mathcal{R}(A) = 0$ маємо $A(x - x_0) = 0$. Значить, $R_\delta Ax \to x_0$ при $\delta \to 0$, причому $x - x_0 \in Ker\, A$, тобто сім'я (R_δ) утворює лінійний регуляризатор рівняння (1). Теорему доведено.

У працях [7–9] лінійні регуляризатори типу операторних функцій досліджено на підсилену B-розв'язність. Так, для регуляризаторів вигляду $R_\delta = \psi(A^*A, \delta)$ [10] доведено [7,9], що, коли $R_\delta y \to x$, $\delta \to 0$, то $A^*Ax = A^*y$. Отже, у цьому випадку $B = A^*$. Тому, якщо $\overline{\mathcal{R}(A)} = Y$, то для відповідних регуляризаторів $B = E$. Для інших регуляризаторів вигляду операторних функцій $R_\delta = \psi(A, \delta)$ [10] залежно від поведінки $\lim_{\delta \to 0} \psi(0, \delta)$ маємо $B = E$ або $B = A$; якщо ця границя не існує або нескінченна, то $B = E$, а якщо вона скінченна, то $B = A$ [8,9]. Таким чином, у багатьох випадках оператор B, при якому лінійний регуляризатор підсилено B-розв'язний, неперевний. Разом з тим існують такі регуляризатори, що серед операторів B, при яких вони підсилено B-розв'язні, нема неперервного.

Теорема 2. *Для сепарабельних гільбертових просторів X та Y існують ін'єктивний оператор $A \in L(X, Y)$ і лінійний регуляризатор $(R_{1/n})$ для рівняння (1), який не є посилено B-розв'язним при жодному неперервному операторі B.*

Доведення. Нехай X, V, W – сепарабельні гільбертові простори з ортонормованими базисами (x_n), (v_n) і (w_n) відповідно, а оператор $A : X \to Y = V \oplus W$ заданий формулою $A(\sum a_n x_n) = \sum 2^n a_n v_n$. Покладімо $S_n(\sum a_i v_i) = \sum_1^n 2^i a_i x_i$, $T_n(\sum a_i w_i) = 2^n a_n x_n$ і $R_{1/n}(v + w) = S_n(v) + T_n(w)$. Тоді для довільного елемента $x = \sum a_i x_i \in X$ маємо $R_{1/n}Ax = S_n Ax + T_n Ax = \sum_1^n a_i x_i + a_n x_n \to x$, тобто $(R_{1/n})$ буде регуляризатором оператора A^{-1}. Виділимо дві властивості цього регуляризатора.

а). Лінійна оболонка елементів $(w_i)_1^\infty$ належить до $M_0(R_{1/n})$. Це випливає з того, що $R_{1/n} w_i = T_n w_i = 0$ при $n > i$.

б). Для елемента $w_0 = \sum i^{-1} w_i \in W$ маємо $R_{1/n} w_0 = T_n w_0 = 2^n n^{-1} x_n \to \infty$.

Припустимо, що регуляризатор $(R_{1/n})$ підсилено розв'язний при операторові $B \in L(Y, X)$. Тоді внаслідок властивості а) та умови 1 означення 3 $Bw = 0$ для будь-якого елемента $w \in lin(w_i)_1^\infty$; отже внаслідок неперервності оператора B маємо $Bw_0 = 0$. Тому рівняння $BAx = Bw_0$ розв'язне і за умовою 2 означення 3 $w_0 \in M(R_{1/n})$. А це суперечить властивості б). Теорему доведено.

Зауваження. Теорема 2 дає негативну відповідь на питання 1 з [4]. Використовуючи базиси Маркушевича, можна показати, що результат, аналогічний до теореми 2, виконується для широкого класу пар сепарабельних банахових просторів X, Y.

Висновок. *Нехай $A \in L(X, Y)$, X, Y – сепарабельні банахові простори. Для будь-якого лінійного РА $R_\delta, \delta \in \Delta$, задачі (1) границя "регуляризованого розв'язку" $R_\delta y_\delta$ при $\delta \to 0$ буде розв'язком рівняння $BAx = By$ при деякому лінійному (не обов'язково неперервному) операторі B з $\mathcal{D}(B) = Y$ і $Ker\, B \cap \mathcal{R}(A) = 0$.*

Доведення. Нехай $R_\delta y_\delta \to x$ при $\delta \to 0$ і $||y_\delta - y|| \leq \delta$. Тоді внаслідок теореми 2.1 з [10, с.27] і нерівності $||R_\delta y_\delta - R_\delta y|| \leq ||R_\delta||\delta$ матимемо $R_\delta y \to x$ при $\delta \to 0$. Оскільки сім'я R_δ, $\delta \in \Delta$, утворює лінійний регуляризатор для рівняння (1), то з огляду на теореми 1 і 2 вона буде підсилено B-розв'язним регуляризатором при деякому лінійному (не обов'язково неперервному) операторі B з $\mathcal{D}(B) = Y$ і $Ker\, B \cap \mathcal{R}(A) = 0$. Висновок доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. *О регуляризации некорректно поставленных задач* // Докл. АН СССР. 1963. Т.153. № 1. С.49–52.
2. Тихонов А.Н. *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации* // Докл. АН СССР. 1963. Т.151. № 3. С.501–504.
3. Маслов В.П. *Существование решения некорректной задачи эквивалентно сходимости регуляризационного процесса* // Успехи матем. наук. 1968. Т.23. вып.3. С.183–184.
4. Доманский Е.Н. *Об эквивалентности сходимости регуляризующего алгоритма существованию решения некорректной задачи* // Успехи матем. наук. 1987. Т.42. вып.5. С.101–118.
5. Доманский Е.Н. *О регуляризуемости по Маслову разрывных отображений* // Изв. РАН. 1993. Т.57. № 1. С.33–58.
6. Доманский Е.Н. *О регуляризующих алгоритмах, сходимость которых эквивалетна разрешимости некоторых линейных операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. 1980. № 7. С.14–20.
7. Худак Ю.И. *О сходимости одного семейства регуляризующих алгоритмов* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т.12. № 2. С.497–502.
8. Бакушинский А.Б. *Об устойчивости и области сходимости некоторых регуляризующих алгоритмов* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т.16. № 1. С.228–232.
9. Доманский Е.Н. *О классе усиленно B-разрешимых линейных регуляризующих алгоритмов* // Изв. вузов. Математика. 1980. № 8. С.20–26.
10. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.:Наука. 1989.

Chelyabinsk State Technical University

Lenin's street76, Chelyabinsk 454080, Russia.

Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics

Naukova 3b, Lviv 290601, Ukraine.

Надійшло 9.02.94.