и каждая слабо сходящаяся подпоследовательность ее имеет своим пределом стандартную нормальную функцию распределения, что равносильно утверждению:

$$\mathbf{P}\,(\xi_n(s) < x) \to \Phi\,(x) \tag{5}$$

слабо для каждого $s \in (0, 1)$. Используя версию [2] условий теоремы В. М. Золотарева (см. [1], с. 37) и соотношения (5) и (3),

$$\sum_{k=1}^{l_n(s)} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x|\,|F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)|\,dx \to 0 \tag{6}$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Справедливость (6) для каждого $s \in (0, 1)$ по упомянутой лемме 2.1.1 ([1], с. 41) влечет условие (2). Необходимость условия (2) доказана.

Доказательство необходимости условия во второй теореме осуществляется аналогично. Изменение сводится к замене ссылки [2] на ссылку [3] (где приводится используемая нами версия условий теоремы Ю. Мачиса, см. [1], с. 40).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Круглов В. М., Королев В. Ю.* Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во Московского университета, 1990, 269 с.
2. *Ротарь В. И.* К обобщению теоремы Линдеберга — Феллера.— Матем. заметки, 1975, т. 18, № 1, с. 129—135.
3. *Кирьянова Л. В., Ротарь В. И.* О неклассических условиях сходимости сверток к пуассоновскому распределению.— Вероятностные процессы и их приложения (Межвузовскоий сборник). М.: Изд-во МИЭМ, 1987, с. 30—34.

Поступила в редакцию
6.IX.1990

МАЦАК И. К., ПЛИЧКО А. Н.

О НОСИТЕЛЕ МЕРЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ФИНИТНОЙ ПРЕДСТАВИМОСТИ

Пусть X, Y — банаховы пространства, а ξ — случайный элемент (с.э.) в X, т. е. измеримое отображение ξ: $\Omega \to X$, (Ω, A, P) — вероятностное пространство. Будем говорить, что с.э. ξ имеет носителем пространство Y, если существует линейный непрерывный оператор T: $Y \to X$ и с.э. η в Y такие, что $\xi = T\eta$ почти наверное (п.н.). Носитель будем называть инъективно или компактно вложенным, если оператор T будет инъективен или компактен. Все банаховы пространства в этой заметке считаются сепарабельными.

Носители с.э. (или, что то же самое, носители мер) изучались ранее (см. [1—5] и библиографию в [1]). Так, в работе [2] показано, что если любой с.э. в X имеет гильбертов носитель, то само пространство X изоморфно гильбертову, а в [3, 4] установлено, что каждый с.э. ξ в X имеет рефлексивный компактно вложенный носитель. В настоящей заметке отмечается, что каждый с.э. в X имеет l_1 носитель, показывается что в любом пространстве бесконечного котипа существует с.э., не имеющий носителем пространство типа больше единицы, а также уточняется упомянутый результат из [3, 4].

Пусть $(\varepsilon_n)_1^\infty$ — последовательность независимых симметричных случайных величин Бернулли. Напомним, что пространство X имеет тип p (котип q), если из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ п.н. (соответственно из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ п.н. следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^q$).

Предложение. *Каждый с.э. ξ в X имеет l_1 носитель, т. е. п.н. $\xi = T\eta$, где T: $l_1 \to X$, $\|T\| = 1$, а η — с.э.* в l_1; *более того, T зависит только от X и существует такое непрерывное отображение φ: $X \to l_1$, что $\eta = \varphi\xi$.*

Замечание. В общем случае отображение φ нельзя выбрать линейным. Например, если с.э. ξ отвечает винеровской мере в $C_{[0,1]}$, то η не может быть гауссовской величиной в l_1, ибо любая гауссовская мера в l_1 имеет гильбертов носитель [1, с. 290], а винеровская мера в $C_{[0,1]}$ не имеет гильбертова носителя.

Лемма 1 [6]. *Для любого линейного непрерывного оператора из банахова пространства Y на банахово пространство X существует такое непрерывное отображение φ: $X \to Y$, что $T\varphi(x) = x$ при любом $x \in X$.*

Как известно [7, с. 108], оператор T, задаваемый формулой $T(a_1, a_2, \ldots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, где (e_n) — плотное множество единичного шара пространства X, линейно и непрерывно отображает l_1 на X. Поэтому предложение немедленно вытекает из леммы 1.

Из предложения вытекает следующий любопытный факт (определения см. в [8, гл. 3]).

Следствие 1. *Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс, $t \in [0, 1]$, а $\{f_n(t)\}_1^\infty$ — совокупность всех полиномов с рациональными коэффициентами на отрезке $[0, 1]$ и $\|f_n\|_{C[0,1]} = 1$. Для того чтобы процесс $\xi(t)$ имел непрерывные выборочные функции на $[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы $\xi(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n f_n(t)$, где $(\xi_n)_1^\infty \in l_1$ п.н.*

Действительно, система $\{f_n(t)\}_1^\infty$ плотна в единичной сфере пространства $C_{[0,1]}$, поэтому оператор T: $l_1 \to C_{[0,1]}$, определяемый равенством $T(a_1, \ldots, a_n, \ldots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t)$, отображает линейно и непрерывно l_1 на $C_{[0,1]}$. Осталось применить лемму 1.

Лемма 2. *Пусть T: $Y \to X$ — линейный непрерывный инъективный оператор, $(\varepsilon_n)_1^\infty$ — последовательность независимых симметричных величин Бернулли. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$, $x_n \in X$, сходится п.н. к с.э. ξ и $\xi = T\eta$ п.н., $\eta \in Y$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n T^{-1} x_n$ сходится п.н. к η.*

Доказательство. Для каждого n положим

$$\xi_n^+ = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i + x_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i x_i, \quad \xi_n^- = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i - x_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i x_i.$$

Случайные элементы $\xi_n^+, \xi_n^- \in TY$ п.н., так как в противном случае приходим к неравенству $\mathrm{P}(\xi \in TY) < 1$. Тогда для всякого n $x_n = (\xi_n^+ - \xi_n^-)/2 \in TY$.

Известно [1, с. 15], что в наших условиях обратный оператор T^{-1} будет измеримым линейным отображением, действующим из нормированного пространства TY на Y. Следовательно, для любого n

$$\eta = \eta_n + \rho_n, \quad \text{где } \eta_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i T^{-1} x_i, \quad \rho_n = T^{-1}\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i x_i\Big).$$

Ясно, что η_n и ρ_n независимы. Поэтому семейство распределений (η_n) равномерно плотно [1, с. 67]. Следовательно [1, с. 214], последовательно η_n сходится п.н. Из взаимной однозначности оператора T получаем, что $\eta = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i T^{-1} x_i$ п.н.

Теорема. 1. *Если банахово пространство X не имеет котипа $q < \infty$ (никакого конечного котипа), то в нем существует с.э., не имеющий инъективным носителем пространства котипа q (соответственно конечного котипа).*

2. *Если X не имеет конечного котипа, то в нем существует с.э., не имеющий носителем пространств типа больше 1.*

Доказательство. Если пространство X не имеет котипа q (конечного котипа), то в нем существует такая последовательность (x_n), что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ сходится п.н. к некоторому с.э. ξ, но $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^q$ расходится (соответственно, $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^q$ расходится для любого конечного q). Предположим, что существуют такие пространство Y котипа q (конечного котипа q), линейный непрерывный инъективный оператор $T: Y \to X$ и с.э. $\eta \in Y$, что $\xi = T\eta$ п.н. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n T^{-1} x_n$ по лемме 2 сходится п. н. Следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| T^{-1} x_n \|^q$, тем более, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^q$. Если существуют пространство Y типа $p > 1$, линейный непрерывный оператор $T: Y \to X$ и с.э. $\eta \in Y$ такие, что $T\eta = \xi$ п.н., то согласно [9, с. 47] фактор-пространство $Z = Y/\{y \in Y\colon Ty = 0\}$ тоже будет иметь тип p. Отображение T индуцирует инъективный оператор $U: Z \to X$ правилом $U \cdot J = T$, где $J: Y \to Z$ — фактор-отображение. Положим $\eta' = J\eta$, тогда $U\eta' = \xi$. Пространство Z типа больше 1 имеет конечный котип q [9, с. 77]. Осталось применить первую часть.

Следствие 2. *Пусть X — банахово пространство и $q = \inf \{r\colon X$ имеет котип $r\}$.*

1. *При $q < \infty$ и $r < q$ существует гауссовский с.э. в X, не имеющий инъективного носителя котипа r.*

2. *При $q = \infty$ существует гауссовский с.э. в X, не имеющий инъективного носителя конечного котипа, и существует гауссовский с.э. в X, не имеющий носителем пространства типа больше 1.*

Доказательство 1. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ сходится п.н., а $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^r = \infty$. Пусть $(\gamma_n)_1^{\infty}$ — последовательность независимых (и не зависимых от ε_n) стандартных гауссовских величин, $\mathbf{M}\gamma_n = 0$, $\mathbf{M}\gamma_n^2 = 1$. Пространство X имеет конечный котип, поэтому ряд $\sum \varepsilon_n \gamma_n x_n$ сходится п.н. [10] к некоторому с.э. Γ. Предположим, что Γ имеет инъективный носитель котипа r. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^r = \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} | \gamma_n |^r \times \| x_n \|^r = \infty$ п.н. [11, с. 52] и (при фиксированных γ_n) $\Gamma = \Gamma(\gamma_n)$ имеет инъективный носитель котипа r. Это означает существование такой неслучайной последовательности z_n $(z_n = \gamma_n x_n)$, что $\sum_{n=1}^{\infty} \| z_n \|^r = \infty$ и с.э. $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n z_n$ имеет инъективный носитель котипа r. С другой стороны, при доказательстве теоремы 1 установлено, что каждый с.э. вида $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n z_n$ при $\sum_{n=1}^{\infty} \| z_n \|^r = \infty$ не может иметь инъективного носителя котипа r, т. е. мы пришли к противоречию.

2. При $q = \infty$ существует такая последовательность $(x_n)_1^{\infty}$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ — сходится п.н., а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^r = \infty$ при любом r. Положим $\Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \gamma_n \ln^{-1/2}(n + 1) x_n$. Сходимость последнего ряда вытекает из сходимости ряда $\Sigma \varepsilon_n x_n$, ограниченности величины $\mathbf{M} \sup_{n \geqslant 1} | \gamma_n \ln^{-1/2}(n + 1) |^p$ [1, с. 255] и неравенства Хофмана — Йоргенсена [1, с. 246]

$$\mathbf{M} \left\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \gamma_n \ln^{-1/2}(n+1)\, x_n \right\|^p \leqslant 2^p \left(\mathbf{M} \sup_{n \geqslant 1} | \gamma_n \ln^{-1/2}(n+1) |^p \cdot \mathbf{M} \left\| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n x_n \right\|^p\right), \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Поскольку показатели сходимости последовательностей $(\| x_n \|^{-1})$ и $(\| x_n \|^{-1} \ln^{1/2} n)$ совпадают [12, с. 40, задача 133], для любого r $\sum_{n=1}^{\infty} (\| x_n \| \ln^{-1/2}(n + 1))^r = \infty$.

При доказательстве п. 1 следствия установлено, что каждый гауссовский с.э. Γ'

вида $\Gamma' = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \| z_n \|^r = \infty$, не может иметь инъективного носителя котипа r. Следовательно, с.э. Γ не может иметь инъективного носителя котипа r.

Из доказательства второй части теоремы 1 следует, что если Γ имеет носитель типа больше 1, то он имеет инъективный носитель конечного котипа, что приводит к противоречию, т. е. п. 2 доказан.

Лемма 3. *Пусть K — компакт в банаховом пространстве X и $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ — плотная в X последовательность конечномерных подпространств. Тогда существует такая возрастающая последовательность чисел $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, что для любого $x \in K$ найдется представление $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in X_{n_k}$, $\| x_k \| < 2^{-k}$ при $k > 1$.*

Доказательство по сути содержится в доказательстве предложения 1.е.2 из [7].

Последовательность подпространств Y_n линейного пространства Y будем называть линейно независимой, если из $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = 0$, $y_n \in Y_n$ следует, что все $a_n = 0$.

Лемма 4. *Пусть Y — бесконечномерное банахово пространство, Y_n — последовательность его конечномерных подпространств. Тогда найдется такая линейно независимая последовательность подпространств $Z_n \subset Y$, что $[Z_n]_1^{\infty} = Y$ и для всякого n существует изоморфизм T_n из Y_n на Z_n с $\max (\| T_n \|, \| T_n^{-1} \|) < 8$.*

Доказательство. Стандартной процедурой возмущения построим последовательность линейно независимых подпространств Y_n' и линейных биекций R_n: $Y_n \to Y_n'$ с $\max (\| R_n \|, \| R_n^{-1} \|) < 2$. Пусть $(z_n)_1^{\infty}$ — линейно независимая последовательность, полная в Y, линейная оболочка которой $\mathrm{lin}\,(Z_n')_1^{\infty}$ пересекается с $\mathrm{lin}\,(Y_n')_{n=1}^{\infty}$ по нулю. Пусть Z_n' — гиперплоскость в Y_n', к которой ортогонален элемент z_n (т. е. $\| z_n \| = \inf \{ \| z_n - z' \| : z' \in Z_n' \}$), а $y_n \in Y_n'$ — элемент, ортогональный к Z_n', $\| y_n \| = \| z_n \|$. Обозначим S_n оператор из Y_n' на $Z_n = \mathrm{lin}\,(Z_n', z_n)$, оставляющий Z_n' на месте и переводящий y_n в z_n. Тогда $[Z_n]_1^{\infty} = Y$, $\max (\| S_n \|, \| S_n^{-1} \|) \leqslant 4$, следовательно, для оператора $T = SR$ имеет место неравенство $\max (\| T \|, \| T^{-1} \|) < 8$.

Говорят, что банахово пространство X грубо финитно представимо в банаховом пространстве Y, если существует такое число a, что для любого конечномерного подпространства $E \subset X$ найдется линейный инъективный оператор T: $E \to Y$ с $\max (\| T \|, \| T^{-1} \|) < a$.

Теорема 2. *Если банахово пространство X грубо финитно представимо в бесконечномерном банаховом пространстве Y, то любая вероятностная мера μ на X имеет компактно вложенным носителем пространство Y.*

Доказательство. Согласно теореме Улама [1, с. 34] существует такая последовательность компактов $K_i \subset X$, что $\mu (\bigcup_i K_i) = 1$. Пусть $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ — плотная в X последовательность конечномерных подпространств. Для каждого i пусть $\{n_k (i)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, построенная в лемме 3, а $X_{n_k(i)}$ — соответствующие подпространства. Пусть $\{Y_k (i)\}_{k=1,\, \infty}^{i=1,\, \infty}$ — последовательность подпространств Y, для которой существуют операторы A_k^i: $Y_k (i) \to X_{n_k(i)}$ с $\max (\| A_k^i \|, \| (A_k^i)^{-1} \|) < a$. Согласно лемме 4 можно построить последовательность линейно независимых подпространств $Z_k^i \subset Y$ с $[Z_k^i]_{k,\, i} = Y$ и линейные изоморфизмы B_k^i: $Z_k^i \to X_{n_k(i)}$ с $\max (\| B_k^i \|, \| (B_k^i)^{-1} \|) \leqslant 8a$.

Для $y \in \mathrm{lin}_{k,\, i}\, Z_k^i$, $y = \sum y_k^i$, $y_k^i \in Z_k^i$ положим

$$T_y = \sum_i 2^{-i} (\sup \{\| x \|:\ x \in K_i\})^{-1} \Big(\sum_k 2^{-k} B_k^i y_k^i\Big).$$

Оператор T продолжается до линейного компактного оператора из Y в X и, согласно лемме 3, $TY \supset \bigcup_i K_i$. Поэтому мера $\nu (\mathscr{B}) = \mu (T (\mathscr{B}))$ будет прообразом μ при отображении T.

Следствие 3. *Вероятностная мера на гильбертовом пространстве имеет компактно вложенным носителем любое бесконечномерное банахово пространство.*

Доказательство. Согласно теореме Дворецкого [13] гильбертово пространство грубо финитно представимо в любом бесконечномерном банаховом пространстве.

Следствие 4. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Вероятностная мера в банаховом пространстве имеет компактно вложенным носителем прямую* l_p*-сумму конечномерных пространств* $(l_\infty \stackrel{\text{def}}{=} c_0)$.

Доказательство. Совсем легко показать, что любое банахово пространство грубо финитно представимо в l_p-сумме конечномерных подпространств.

Замечание. Следствие 2 уточняет результат [3, 4] о том, что любая мера имеет компактно вложенный рефлексивный носитель.

Следствие 5. *Вероятностная мера в банаховом пространстве имеет компактно вложенным носителем пространство* c_0 *и инъективным компактно вложенным носителем некоторое подпространство* c_0.

Доказательство. Первая часть следствия вытекает из финитной универсальности c_0, а вторая из того, что любое фактор-пространство пространства c_0 изоморфно подпространству c_0 [7, с. 107].

Замечание. Результат о том, что любая гауссовская мера имеет носителем подпространство c_0 анонсирован в [14].

Авторы благодарны рецензенту за ряд предложений по улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985, 368 с.
2. *Mouchtari D.* La topologie du type Sazonov pour les Banach et les support hilbertiens.— Ann. Univ. Clermont, 1976, t. 61, p. 77—87.
3. *Островский Е. И.* О носителях вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах.— Докл. АН СССР, 1980, т. 255, № 6, с. 1319—1320.
4. *Булдыгин В. В.* Носители вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах.— Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, в. 3, с. 528—532.
5. *Tarieladze V. I.* Characterisation of covariance operators which guarantee the CLT.— Lect. Not. Statist., 1980, v. 2, p. 348—359.
6. *Michael E.* Continuous selections. I.— Ann. Math., 1956, v. 63, № 2, p. 361—382.
7. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I. Berlin e. a.: Springer, 1977, 190 p.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971, 664 с.
9. *Schvartz L.* Geometry and probability in Banach spaces.— Lect. Notes Math., 1981., B. 852, S. 1—101.
10. *Maurey B., Pisier G.* Séries de variables aléatoires vectorielles independantes et propriétes géometriques des espaces de Banach.— Studia Math., 1976, v. 58, № 1, p. 45—90.
11. *Кахан Ж. П.* Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973, 302 с.
12. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978, 391 с.
13. *Figiel T., Lindenstrauss J., Milman V. D.* The dimension of almost spherical sections of convex bodies.— Acta Math., 1977, v. 139, № 1—2, p. 53—94.
14. *Talagrand M.* La description des processus gaussiens bornés.— Comptes rendus Acad. Sci., ser. 1, 1985, t. 301, № 15, p. 751—753.

Поступила в редакцию
20.IV.1989