14. Шапиро Я. Л., Жукова Н. И., Игошин В. А. Слоения на некоторых классах римановых многообразий // Изв. вузов. Математика.— 1979.— № 7.— С. 93—96.
15. Игошин В. А. Гомоморфизмы квазигеодезических потоков и двуслоения: Дис... канд. физ.-мат. наук. — Горький, 1979.— 128 с.
16. Шапиро Я. Л., Жукова Н. И. О глобальной структуре приводимых римановых многообразий // Изв. вузов. Математика.— 1980.— № 10.— С. 60—62.

г. Горький

Поступила
04.04.1986

В. М. Кадец, А. Н. Пличко, М. М. Попов УДК 517.982

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ПОЛНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ниже предлагается некоторое ослабленное понятие базиса (финитный базис) банахова пространства, имеющее смысл для пространств любой размерности. Это понятие слабее, чем базис Энфло — Розенталя, но никак не связано с базисом Маркушевича. Одно из эквивалентных определений финитного базиса показывает, что это есть обобщение трансфинитного базиса на случай произвольных линейно упорядоченных множеств.

1. *Некоторые предварительные сведения.* Пусть X — банахово пространство; X^* — его сопряженное; $\{x_i\}_{i\in I}\subset X$ — произвольная система элементов. Система $\{x_i\}_{i\in I}$ называется полной, если замыкание ее линейной оболочки совпадает с $X:[x_i:i\in I]=X$, и минимальной, если $x_j\notin[x_i:i\in I\setminus\{j\}]$ для каждого $j\in I$.

Для полной минимальной системы единственным образом определяются биортогональные функционалы $\{x_i^*\}_{i\in I}\subset X^*$ (т. е. такие функционалы, что $x_j^*(x_i)=\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера). Система $\{x_i^*\}_{i\in I}$ называется сопряженной к системе $\{x_i\}_{i\in I}$. Полная минимальная система $\{x_i\}_{i\in I}$ называется ограниченной числом $M<\infty$ (ограниченной), если $\|x_i\|\cdot\|x_i^*\|\leqslant M$ для каждого $i\in I$ (если $\sup\limits_{i\in I}\|x_i\|\cdot\|x_i^*\|<\infty$ соответственно).

Система $\{x_i\}_{i\in I}\subset X$ называется M-базисом (базисом Маркушевича), если она является полной и минимальной, а сопряженная система $\{x_i^*\}_{i\in I}$ является тотальной, т. е. если для каждого $x\in X$ из условий $x_i^*(x)=0$ для всех $i\in I$ следует, что $x=0$.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — система элементов X. Базисной константой $\Gamma\{x_k\}_{k=1}^n$ называется наименьшее число $M\leqslant\infty$, для которого

$$\|\sum_{i=1}^k a_i x_i\|\leqslant M\cdot\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\|$$

при любых скалярах $\{a_i\}_{i=1}^n$ и целом k, $1\leqslant k\leqslant n$.

Теперь напомним определение трансфинитного базиса. Пусть $\{x_\gamma\}_{\gamma<\delta}$ — трансфинитная последовательность элементов X (δ — ординал). Говорят, что ряд $\sum\limits_{\gamma<\delta}x_\gamma$ сходится к элементу $x\in X$ ($\sum\limits_{\gamma<\delta}x_\gamma=x$), если существует непрерывная (относительно порядковой топологии) функция $S:(\delta+1)\to X$, обладающая свойствами: $S(0)=0$, $S(\delta)=x$, а также $S(\gamma+1)=S(\gamma)+x_\gamma$ для любого $\gamma<\delta$. В этом случае $S(\gamma)=\sum\limits_{\beta<\gamma}x_\beta$ для любого $\gamma<\delta$ [1] (с. 582). Трансфинитная последовательность $\{x_\gamma\}_{\gamma<\delta}\subset X$ называется трансфинитным базисом X (типа δ), если для любого $x\in X$ существует единственная последовательность скаляров $\{a_\gamma\}_{\gamma<\delta}$ такая, что $x=\sum\limits_{\gamma<\delta}a_\gamma x_\gamma$. Трансфинитный базис типа $\delta=\omega_0$ (ω_0 — минимальный бесконечный ординал) называется базисом Шаудера (чаще—базисом). Полная последовательность элементов $\{x_\gamma\}_{\gamma<\delta}$ пространства Банаха X является трансфинитным базисом X, если и только если $M = \sup \Gamma \{x_{\gamma_k}\}_{k=1}^{n} < \infty$, где sup берется по множеству всех конечных возрастающих последовательностей $\gamma_1 < \ldots < \gamma_n < \delta$ [1] (с. 589); число M называется базисной константой базиса $\{x_\gamma\}_{\gamma<\delta}$. Трансфинитный базис является ограниченным M-базисом [1] (с. 585).

Базисом Энфло — Розенталя пространства Банаха X называется полная система элементов X, каждая счетная подсистема которой является базисной последовательностью (т. е. базисом Шаудера в замыкании своей линейной оболочки) относительно некоторой нумерации ее элементов. При этом существует такая константа $M < \infty$, что каждую счетную подсистему можно занумеровать так, чтобы ее базисная константа не превосходила M [2].

2. *Финитный базис и его свойства.* Пусть X — банахово пространство.

Определение. Полную систему элементов $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ назовем финитным базисом X (коротко—Φ-базисом), если существует константа $M < \infty$, обладающая свойством:

(+) любую конечную подсистему $\{x_i\}_{i\in I_0}$, $I_0 \subset I$, можно упорядочить таким образом $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{n}$, что $\Gamma \{x_{i_k}\}_{k=1}^{n} \leqslant M$.

Нетрудно видеть, что $M_0 = \inf \{M : M$ обладает свойством (+)$\}$ также обладает свойством (+); число M_0 будем называть Φ-базисной константой Φ-базиса $\{x_i\}_{i\in I}$.

Примерами Φ-базиса являются любой трансфинитный базис, а также базис Энфло — Розенталя.

Утверждение 1. *Φ-базис $\{x_i\}_{i\in I}$ пространства X с Φ-базисной константой M является полной минимальной системой, ограниченной числом* $2M$.

Доказательство. Пусть $i \in I$. Заметим, что для любого конечного подмножества $I_0 \subset I \setminus \{i\}$ и любого элемента $x \in [x_j : j \in I_0]$ выполнено неравенство $\|x_i\| \leqslant 2M \|x_i - x\|$. Действительно, упорядочим множество $I_0 \cup \{i\} = \{i_1, \ldots, i_n\}$ так, чтобы $\Gamma \{x_{i_k}\}_{k=1}^{n} \leqslant M$. Пусть для определенности $i = i_m$, $x = \sum\limits_{k\neq m} a_k x_{i_k}$. Тогда

$$\|x_i\| \leqslant \|x_{i_m} - \sum_{k=1}^{m-1} a_k x_{i_k}\| + \|\sum_{k=1}^{m-1} a_k x_{i_k}\| \leqslant 2M \|x_i - x\|.$$

Из доказанного неравенства легко следует, что $\{x_i\}_{i\in I}$ — минимальная система, ограниченная числом $2M$. ■

Легко привести пример неограниченного M-базиса, не являющегося поэтому Φ-базисом. Однако не всякий ограниченный M-базис является финитным базисом. Ниже будет доказано, что таким примером является система (Уолша в L_1.

Напомним определение системы Уолша. Пусть $n \geqslant 1$ — натуральное число $n \in N$). На отрезке $[0, 1]$ n-я функция Радемахера задается равенством

$$r_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } i-1 < 2^n t < i, & i \text{ нечетное;} \\ -1 \text{ при } i-1 < 2^n t < i, & i \text{ четное,} \end{cases} \quad i = 1, \ldots, 2^n.$$

Пусть теперь $N_0 \subset N$ — конечное подмножество. Система Уолша определяется так:

$$w_{N_0}(t) = \prod_{n\in N_0} r_n(t),$$
$$N_0 \subset N$$

(произведение по пустому множеству индексов считается равным единице). Как известно, система Уолша $\{w_{N_0}\}_{N_0 \subset M}$ является M-базисом в $L_p = L_p[0, 1]$ при $1 \leqslant p < \infty$, причем сопряженная система совпадает с исходной: $w^*_{N_0} = w_{N_0}$ (при известном отождествлении L^*_p с L_q, $1/p + 1/q = 1$ при $p > 1$ и L^*_1 с L_∞), так что $\|w_{N_0}\| \|w^*_{N_0}\| = 1$ при $N_0 \subset N$.

Утверждение 2. *Система Уолша не является Φ-базисом в* L_1.

Доказательство. Предположим противное. Пусть M есть Φ-базисная константа системы Уолша в L_1. Занумеруем систему Уолша следующим образом. Положим $w_0=w_{\varnothing}\equiv 1$; $w_1=w_{\{1\}}=r_1$. Пусть зафиксирована нумерация $w_0, \ldots, w_{2^k-1}$ такая, что

$$W_k=\{w_0, \ldots, w_{2^k-1}\}=\{w_{N_0}: N_0\subset\{1, \ldots, k\}\}.$$

Согласно допущению существует такое упорядочение $W_k=\{w_{N_0}, \ldots, w_{N_{2^k-1}}\}$, что $\Gamma\{w_{N_j}\}_{j=0}^{2^k-1}\leqslant M$. Положим $w_{2^k+l}=r_{k+1}w_{N_l}$, $0\leqslant l\leqslant 2^k-1$. Таким образом, $\{w_0, \ldots, w_{2^{k+1}-1}\}=W_{k+1}$. Нумерация по индукции системы Уолша завершена.

Докажем, что $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ — базис в L_1. Пусть $x\in L_1$. Положим $P_n x=\sum_{i=0}^{n}a_i w_i$, где $a_i=\int x w_i d\mu$, $n\in N$. Нетрудно проверить, что P_n — проектор в L_1, причем $\|P_{2^k-1}\|=1$, $k=0, 1, \ldots$ Пусть $2^k\leqslant n<2^{k+1}$. Тогда

$$\|P_n x\|\leqslant\|P_{2^k-1}x\|+\|\sum_{i=2^k}^{n}a_i w_i\|\leqslant\|x\|+M\|\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}a_i w_i\|\leqslant$$

$$\leqslant\|x\|+M(\|P_{2^{k+1}-1}x\|+\|P_{2^k-1}x\|)\leqslant(1+2M)\|x\|.$$

Итак, система Уолша в некотором порядке образует базис в L_1, что не согласуется с теоремой А. М. Олевского [3] о том, что никакая ортонормированная равномерно ограниченная система в L_1 не образует базис. ■

3. *Финитный базис как линейно упорядоченное множество.*

Теорема 1. *Полная система $\{x_i\}_{i\in I}\subset X$ является Ф-базисом в X, если и только если существует линейное упорядочение $<$ множества I, которое мы будем называть единообразным, такое, что* $\sup\Gamma\{x_{i_k}\}_{k=1}^{n}<\infty$, где sup *берется по множеству всех конечных возрастающих последовательностей $i_1<\ldots<i_n$ из I* (ср. с критерием трансфинитного базиса). *При этом множество I можно упорядочить $<$ так, чтобы* $\sup\{\Gamma\{x_{i_k}\}_{k=1}^{n}: i_1<\ldots<i_n\}=M$, *где M есть Ф-базисная константа Ф-базиса $\{x_i\}_{i\in I}$* (такое упорядочение мы будем называть точным).

Теорема 3 вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть I — множество и для каждого конечного подмножества $I_1\subset I$ зафиксировано некоторое непустое семейство $\tau(I_1)$ линейных упорядочений множества I_1, причем если $I_0\subset I_1$ и $\pi\in\tau(I_1)$, то сужение $\pi|I_0$ упорядочения π на множество I_0 принадлежит $\tau(I_0)$. Тогда существует линейное упорядочение α множества I такое, что $\alpha|I_1\in\tau(I_1)$ для любого конечного подмножества $I_1\subset I$.*

Доказательство. Пусть $F(I)$ — множество всех конечных подмножеств множества I, упорядоченное по включению; через $\boldsymbol{F}(I)$ обозначим фильтр на $F(I)$, порожденный этим упорядочением. Выберем для каждого конечного подмножества $I_1\subset I$ некоторый элемент $\pi(I_1)\in\tau(I_1)$. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольный ультрафильтр на $F(I)$, мажорирующий фильтр $\boldsymbol{F}(I)$. Так как множество $\tau(I_0)$ конечно для данного конечного подмножества $I_0\subset I$, то существует предел

$$\sigma(I_0)=\lim_{\substack{I_1\to\infty\\ \mathfrak{U}}}(\pi(I_1)|I_0)$$

функции $\pi(I_1)|I_0$ по фильтру $\mathfrak{U}$ (определение предела функции по фильтру имеется, напр., в [4] (с. 99)) относительно дискретной топологии на $\tau(I_0)$. Поскольку согласно условию леммы $\pi(I_1)|I_0\in\tau(I_0)$ для каждого $I_1\supset I_0$, то и $\sigma(I_0)\in\tau(I_0)$. Докажем, что существует линейное упорядочение α множества I, для которого соотношение $\alpha|I_0=\sigma(I_0)$ выполняется при всех $I_0\in F(I)$. Для этого заметим сначала, что если $I_0\subset I_1\in F(I)$, то

$$(++)\quad \sigma(I_0)=\sigma(I_1)|I_0.$$

Действительно, пусть Q — такой элемент ультрафильтра $\mathfrak{U}$, что $\pi(J)|I_0=\sigma(I_0)$ при любом $J\in Q$, а $H\in\mathfrak{U}$ такой, что $\pi(J)|I_1=\sigma(I_1)$ при $J\in H$. Согласно определению фильтра множество $Q\cap H$ непусто и является элементом фильтра $\mathfrak{U}$. Пусть $I_2\in Q\cap H$, $I_2\supset I_1$. Тогда $\sigma(I_0)=\pi(I_2)|I_0=(\pi(I_2)|I_1)|I_0=\sigma(I_1)|I_0$.

Итак, соотношение $(++)$ доказано. Упорядочение α определим следующим образом: для любых элементов i и j из I будем считать, что $i \overset{\alpha}{>} j$, если и только если для любого множества $I_0 \in F(I)$, $I_0 \supset \{i, j\}$, выполнено $i > j$ относительно упорядочения $\sigma(I_0)$. Корректность такого определения, а также линейность упорядочения α следуют из соотношения $(++)$. Итак, α — искомое упорядочение. ■

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{x_i\}_{i \in I}$ есть Φ-базис в X с Φ-базисной константой M. Тогда для каждого конечного подмножества $I_1 \subset I$ множество $\tau(I_1)$ всех упорядочений множества I_1, при которых базисная константа системы $\{x_i\}_{i \in I_1}$ не превосходит M, непусто. Условия леммы 1, очевидно, выполнены. Пусть α — упорядочение множества I, существование которого утверждает лемма. Тогда

$$\sup \{\Gamma \{x_{i_k}\}_{k=1}^{n} : i_1 \overset{\alpha}{<} \ldots \overset{\alpha}{<} i_n\} \leqslant M,$$

причем строгое неравенство невозможно согласно определению Φ-базисной константы. Обратное утверждение теоремы очевидно.

Следствие 1. *Φ-базис бесконечномерного банахова пространства содержит бесконечную базисную последовательность.*

Доказательство. Легко видеть, что каждое бесконечное линейно упорядоченное множество содержит либо возрастающую, либо убывающую бесконечную последовательность. ■

Следствие 2. *Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть Φ-базис пространства X, не являющийся базисом Шаудера ни при какой перестановке индексов, то X представимо в виде прямой суммы двух бесконечномерных подпространств.*

Доказательство. В этом случае единообразно упорядоченное множество $I = N$ не является ни возрастающей, ни убывающей последовательностью, следовательно, его можно разбить на два бесконечных подмножества $I = I_0 \cup I_1$ такие, что $i_0 < i_1$ при любых $i_0 \in I_0$, $i_1 \in I_1$. Тогда $X = X_0 \oplus X_1$, где $X_0 = [x_i : i \in I_0]$, $X_1 = [x_i : i \in I_1]$. ■

4. *Финитный базис и вопросы двойственности.* Основной вопрос этого пункта — что представляет собой сопряженная система к Φ-базису? Является ли она Φ-базисом в замыкании своей линейной оболочки? Является ли сопряженная система тотальной (другими словами, является ли каждый Φ-базис базисом Маркушевича)? В одних случаях ответ такой же, как для базисов Шаудера, в других — противоположный.

Утверждение 3. *Пусть $\{x_i\}_{i \in I}$ есть Φ-базис в X с Φ-базисной константой M. Тогда сопряженная система $\{x_i^*\}_{i \in I}$ является Φ-базисом в замыкании своей линейной оболочки $[x_i^* : i \in I] \subset X^*$ с Φ-базисной константой, не превосходящей M.*

Доказательство. Считаем множество индексов I единообразно упорядоченным. Пусть $i_1 < \ldots < i_n \in I$. Докажем, что $\Gamma \{x_{i_k}^*\}_{k=1}^{n} \leqslant M$. Пусть, напротив, $\|\varphi\| \geqslant M + \delta$, $\|\psi\| = 1$, где $\varphi = \sum_{k=1}^{r} a_k x_{i_k}^*$ и $\psi = \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k}^*$, $1 \leqslant r < n$, $\delta > 0$. Выберем x и y из линейной оболочки системы $\{x_i\}_{i \in I}$ так, чтобы $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|\varphi\| - |\varphi(x)| < \delta/2$ и $\|\psi\| - |\psi(y)| < \delta/2M$. Пусть $I_0 \subset I$ — такое конечное подмножество, что $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I_0$, а также $x, y \in \mathrm{Lin}\{x_i : i \in I_0\} = X_0$.

Для $i \in I_0$ обозначим через $\widetilde{x}_i^*$ сужение x_i^* на X_0. Согласно построению

$$\left| \left\| \sum_{k=1}^{r} a_k \widetilde{x}_{i_k}^* \right\| - \|\varphi\| \right| < \delta/2$$

и

$$\left| \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \widetilde{x}_{i_k}^* \right\| - \|\psi\| \right| < \delta/2M.$$

Поэтому

$$\frac{\left\| \sum_{k=1}^{r} a_k \widetilde{x}_{i_k}^* \right\|}{\left\| \sum_{k=1}^{s} a_k \widetilde{x}_{i_k}^* \right\|} > \frac{\|\varphi\| - \delta/2}{\|\psi\| + \delta/2M} \geqslant \frac{M + \delta - \delta/2}{1 + \delta/2M} = M.$$

Последнее противоречит тому, что если $\Gamma\{x_i\}_{i\in I_0} \leqslant M$, то $\Gamma\{\widetilde{x}_i^*\}_{i\in I_0} \leqslant M$ (относительно порядка в I_0) [5] (с. 7). (Заметим, что здесь мы использовали единый порядок для систем $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ и $\{x_i : i \in I_0\}$.)

Сопряженная система к Φ-базису не обязана быть тотальной.

Теорема 2. *Существует нерефлексивное пространство Банаха с Φ-базисом, не являющимся базисом Маркушевича.*

Доказательство. Пусть X — пространство непрерывных справа функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, имеющих разрывы только первого рода и только в рациональных точках; норма функций — супремум модуля. Обозначим через Q множество всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Нетрудно видеть, что следующая система функций образует Φ-базис в $X : \{x_q\}_{q\in Q}$, где

$$x_q(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant t < q; \\ 1 \text{ при } q \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

(если $q_1 < \ldots < q_n$, то $\Gamma\{q_k\}_{k=1}^{n} = 1$). Сопряженная система определяется следующим образом:

$$x_q^*(x) = \lim_{t\to q+0} x(t) - \lim_{t\to q-0} x(t)$$

при $q \neq 0$ и $x_0^*(x) = x(0)$. Если x — непрерывная функция и $x(0) = 0$, то $x_q^*(x) = 0$ для любого $q \in Q$. Следовательно, сопряженная система не является тотальной. ■

Отметим, что для рефлексивного пространства X подмножество $S \subset X^*$ плотно, $[S] = X^*$, если и только если S тотально. Поэтому сопряженная система $\{x_i^*\}_{i\in I}$ к Φ-базису $\{x_i\}_{i\in I}$ рефлексивного пространства X является Φ-базисом в X^* тогда и только тогда, когда $\{x_i\}_{i\in I}$ является базисом Маркушевича.

Теорема 3. *Существует рефлексивное пространство Банаха с Φ-базисом, не являющимся базисом Маркушевича.*

Доказательство. Пусть X и $\{x_q\}_{q\in Q}$ те же, что и при доказательстве теоремы 2. Обозначим $x_0(t) = t$ при $t \in [0, 1]$. Положим $m_k = k^2 \cdot 2^{k+1}$, а также $n_1 = 1$, $n_{k+1} = n_k + m_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такие попарно различные рациональные числа, что $\|S_k - x_0\| < 2/m_k$, где

$$S_k = \frac{1}{m_k} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} x_{r_n}.$$

Другими словами, функцию $x_0(t)$ мы приближаем ступенчатыми функциями. Такие существуют. Действительно, если $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, то, положив $r_n = (n - n_k)/m_k$, получим

$$S_k(t) = \frac{1}{m_k} \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} x_{r_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant t < 1/m_k; \\ 1/m_k & \text{при } 1/m_k \leqslant t < 2/m_k; \\ 2/m_k & \text{при } 2/m_k \leqslant t < 3/m_k; \\ \cdots & \cdots \\ (m_k - 1)/m_k & \text{при } (m_k - 1)/m_k \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

следовательно, $\|S_k - x_0\| = 1/m_k$. Для того, чтобы получить все числа $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ различными, достаточно сдвинуть встречавшиеся ранее числа r_n $(n_k < n \leqslant n_{k+1})$

на столь малую величину, чтобы имела место оценка $\|S_k - x_0\| < 2/m_k$. Мы также можем добиться того, чтобы множество $Q \setminus \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ было бесконечным, не включая в $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ заведомо фиксированную последовательность рациональных чисел, имеющую не более одной предельной точки.

Пусть $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная нумерация подмножества рациональных чисел $Q \setminus \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим следующее отображение $T: l_1 \times l_1 \to X$. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{e_n'\}_{n=1}^{\infty}$ — естественный базис пространства $l_1 \times l_1$. При $n \geqslant 1$ положим

$$Te_n = \frac{1}{n} x_{q_n}, \quad Te_n' = \frac{1}{k} x_{r_n},$$

где $n_k < n \leqslant n_{k+1}$. Оператор T продолжается по линейности и непрерывности до компактной инъекции, заданной на $l_1 \times l_1$. Положим $W = T(B(l_1 \times l_1))$ (образ единичного шара пространства $l_1 \times l_1$ при действии оператора T) и $|\cdot|$ — калибровочная функция множества W, которое является выпуклым, симметричным и относительно компактным. Тогда

$$|S_k| = \frac{1}{m_k} \|T^{-1}\Big(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} x_{r_n}\Big)\|_l = \frac{1}{m_k} k\, m_k = k.$$

Далее применяем конструкцию Дэвиса — Фигеля — Джонсона — Пелчинского [6] (с. 124) рефлексивного пространства. Положим $U_k = 2^k W + 2^{-k} B(X)$, $k = 1, 2, \dots$, и обозначим через $\|\cdot\|_k$ калибровочную функцию множества U_k. Введем пространство $Y = \{x \in X : |||x||| < \infty\}$, где $|||x|||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x\|_k^2$. Согласно [6] (с. 124) Y с нормой $|||\cdot|||$ является рефлексивным банаховым пространством. Оценим $|||S_k - x_0|||$:

$$\|S_k - x_0\|_i = \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{\lambda}(S_k - x_0) \in (2^i W + 2^{-i} B(X))\};$$

$$\frac{1}{\lambda}(S_k - x_0) = \frac{1}{\lambda}(S_i - x_0) + \frac{1}{\lambda} S_k - \frac{1}{\lambda} S_i,$$

причем $\lambda^{-1}\|S_i - x_0\| < 2/\lambda m_i$ и $|\lambda^{-1} S_k - \lambda^{-1} S_i| \leqslant \lambda^{-1}(|S_k| + |S_i|) \leqslant \lambda^{-1}(k+i)$. Поэтому $2^{-1}(S_i - x_0) \in 2^{-i} B(X)$ при $\lambda \geqslant 2^{i+1}/m_i$ и $\lambda^{-1}(S_k - S_i) \in 2^i W$ при $\lambda \geqslant (k+i)/2^i$. Следовательно, $\lambda^{-1}(S_k - x_0) \in 2^i W + 2^{-i} B(X)$ при $\lambda \geqslant \max\{2^{i+1}/m_i, (k+1)/2^i\}$.

Для $k \leqslant i$ имеем $\|S_k - x_0\|_i \leqslant \max\{i^{-2}, (k+i)/2^{i+1}\} \leqslant \max\{i^{-2}, i/2^i\} \leqslant c/ik$, где c — абсолютная константа, зависящая от числа, начиная с которого последовательность i^{-2} становится большей, чем $i/2^i$.

Далее, $\lambda^{-1}\|S_k - x_0\| \leqslant \lambda^{-1} \cdot 2/m_k = 2^i$ при $\lambda = 2 \cdot 2^i/k^2 \cdot 2^{k+1}$, т. е. $\lambda^{-1}(S_k - x_0) \in 2^{-i} B(X)$. Следовательно, при $k \geqslant i$ имеем

$$\|S_k - x_0\|_i \leqslant 2 \cdot 2^i/k^2 \cdot 2^{k+1} \leqslant k^{-2} \leqslant (ki)^{-1}.$$

Таким образом, $\|S_k - x_0\|_i \leqslant C/ki$, следовательно,

$$|||S_k - x_0||| \leqslant C'/k \tag{1}$$

и $S_k - x_0 \in Y$, C' — абсолютная константа. Поскольку $S_k \in Y$, то $x_0 \in Y$. Обозначим через Y_1 замыкание в Y линейной оболочки элементов x_q, $q \in Q$. В силу (1) $x_0 \in Y_1$. Конечно, сужения функционалов x_q^* на Y_1 непрерывны и обращаются все в нуль на элементе x_0. Поэтому $\{x_q\}_{q \in Q}$ не образует M-базиса в Y_1.

Убедимся в том, что $\{x_q\}_{q \in Q}$ есть Φ-базис пространства Y_1. Система $\{x_q\}_{q \in Q}$ полна по построению. Для рационального числа q обозначим через P_q проектор в X на $[x_r : r \leqslant q]$ параллельно $[x_r : r > q]$. Если $x = y + z$, $y \in 2^i W$, $z \in 2^{-i} B(X)$, то $|P_q y| \leqslant |y|$ и $\|P_q z\| \leqslant \|z\|$, поэтому $P_q x \in 2^i W + 2^{-i} B(X)$. Следовательно, $\|P_q\|_i = 1$ при любом i и $|||P_q||| = 1$. Отсюда легко следует, что $\{x_q\}_{q \in Q}$ есть Φ-базис. ■

5. *Перестановки финитных базисов.* Здесь мы исследуем вопрос о том, каким образом можно менять порядок в Φ-базисе так, чтобы упорядочение оставалось единообразным.

Определение. Пусть I — линейно упорядоченное множество; $\pi: I \to I$ — биекция. Назовем π безразличной перестановкой, если для любого Φ-базиса $\{x_i\}_{i \in I}$ с единообразным упорядочением, совпадающим с порядком в I, система $\{x_{\pi(i)}\}_{i \in I}$ также является Φ-базисом с тем же единообразным упорядочением.

В случае $I = N$ имеем

Утверждение 4. *Перестановка $\pi: N \to N$ безразлична, если и только если она сохраняет базисность последовательности $x_1 = e_1$, $x_2 = e_1 + e_2, \ldots$, $x_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n, \ldots$, где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — канонический базис пространства c_0.*

Доказательство. Отметим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в c_0, обладающий свойством: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ сходится, если и только если сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n$, причем $\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n\| = \sup\limits_n |\sum\limits_{i=n}^{\infty} t_i|$. Нетрудно видеть, что перестановка π сохраняет базисность последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если и только если π переводит каждый сходящийся числовой ряд в сходящийся числовой ряд. Если перестановка π безразлична, то она сохраняет базисность системы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Докажем обратное: если перестановка π сохраняет сходимость всех числовых рядов, то она безразличная. Действительно, пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис в X. Тогда для любого $x \in X$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y^*_{\pi(n)}(x)\, y_{\pi(n)}$ сходится на всех линейных функционалах. Следовательно, последовательность частичных сумм $S_n(x)$ ограничена при всех $x \in X$ $\left(S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} y^*_{\pi(k)}(x)\; y_{\pi(k)}\right)$ и согласно теореме Банаха — Штейнгауза $\sup\limits_n \|S_n\| < \infty$, т. е. $\{y_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — базис. ■

Пусть I — линейно упорядоченное множество. Через $Y(I)$ будем обозначать подпространство $l_\infty(I)$, порожденное следующей системой функций:

$$y_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{при } j \leqslant i; \\ 0 & \text{при } j > i. \end{cases}$$

Система $\{y_i\}_{i \in I}$ образует Φ-базис в $Y(I)$ с Φ-базисной константой, равной единице, а порядок в I является единообразным (точным является упорядочение, обратное к порядку в I). При $I = N$ пространство $Y(N)$ совпадает с c_0, а система $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть базис, определенный в утверждении 4.

Утверждение 5. *Пусть I — линейно упорядоченное множество, $\pi: I \to I$ — биекция. Следующие предложения эквивалентны:*

а) *π является безразличной перестановкой;*

б) *система $\{y_{\pi(i)}\}_{i \in I}$ является Φ-базисом в $Y(I)$ с единообразным упорядочением, совпадающим с порядком в I;*

в) *существует константа $K < \infty$ такая, что для любого конечного подмножества $i_1 < \ldots < i_n$ из I базисная константа множества $\{y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}\} \subset Y(I)$, записанного в порядке, порожденном перестановкой π, не превосходит K.*

Доказательство. а) $\to$ б) $\to$ в) очевидно. Докажем в) $\to$ а). Пусть π не является безразличной перестановкой. Тогда найдется пространство X с Φ-базисом $\{z_i\}_{i \in I}$, $\Gamma\{z_i\}_{i \in I_0} < C < \infty$ для конечных подмножеств $I_0 \subset I$, для которого упорядочение $\{z_{\pi(i)}\}_{i \in I}$ не является единообразным. Это означает, что существует возрастающая последовательность чисел $K_1 < K_2 < \ldots$, $\lim\limits_n K_n = \infty$, и последовательность подмножеств $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, $I_n \subset I$, $I_n = \{i_{n,1}, \ldots, i_{n,m_n}\}$, для которых $\Gamma\{z_i\}_{i \in I_n} < C$; $\Gamma\{z_{\pi_n(i)}\} > K_n$ (через π_n мы обозначили перестановку множества I_n, порождаемую перестановкой π). Очевидно, I_n можно считать непересекающимися. Введем упорядоченное множество $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, где на I_n сохранен порядок, а если $y \in I_k$, $z \in I_{k+n}$, то $y < z$. Определим перестановку σ на J так, чтобы $\sigma(I_n) = I_n$; $\sigma|_{I_n} = \pi|_{I_n}$. Наконец, введем пространство

$$Y = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Lin}\, \{z_i\}_{i \in I_n} \Big)_{l_2}.$$

По построению система $\{z_n\}_{n \in J}$ — базис в Y, а переставленная система $\{z_{\sigma(n)}\}_{n \in J}$ базисом не является. Согласно утверждению 4 система $\{y_{\sigma(n)}\}_{n \in J}$ не является базисом в $c_0(J)$, где $\{y_n\}_{n \in N}$ — определенный выше Φ-базис в $Y(J)$. Следовательно, $\sup_n \{\Gamma\{x_{\pi_n(k)}\}_{k \in I_n}\} = \infty$, т. к. каждое из множеств I_n инвариантно относительно σ. Последнее противоречит условию п. в). ■

Вопрос 1. Существует ли Φ-базис в l_∞?

Поскольку существует банахово пространство без полной минимальной системы [7], то существует пространство без Φ-базиса.

Вопрос 2. Каждое ли сепарабельное банахово пространство имеет Φ-базис?

Вопрос 3. Связано ли существование Φ-базиса в банаховом пространстве с его аппроксимационными свойствами?

ЛИТЕРАТУРА

1. Singer I. Bases in Banach spaces. II.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer — Verlag, 1981.—880 p.
2. Пличко А. Н. О базисах и дополнениях в несепарабельных банаховых пространствах // Сиб. матем. журн.—1984.— Т. 25.— № 4.— С. 155—162.
3. Олевский А. М. Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным ортонормальным системам // Изв. АН СССР. Сер. матем.—1966.— Т. 30.— № 2.— С. 387—432.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры.— М.: Наука, 1968.—272 с.
5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. I.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer — Verlag, 1977.—188 p.
6. Дистель Д. Геометрия банаховых пространств.— Киев, 1980.—215 с.
7. Пличко А. Н. Банахово пространство без фундаментальной биортогональной системы // ДАН СССР.—1980.—Т. 254.— № 4.—С. 798—801.

г. Харьков
г. Львов
г. Черновцы

Поступила
29.05.1986