$$t(Z^{1/2}f,\ Z^{1/2}g)=(A_\varepsilon f,\ g),\quad f,\ g\in\bigcup_{Q\leqslant P}\mathfrak{R}^Q_{Z^{1/2}}.$$

Пусть $\varepsilon=1/n$ и выберем последовательность $P_{1/n}$ возрастающей. Тогда последовательность операторов $A_{1/n}$ согласована, т. е. для $P_{1/n}<P_{1/m}$ $A_{1/n}=P_{1/n}A_{1/m}P_{1/n}$. Это влечет ее фундаментальность по мере τ. Пусть $A_{1/n}\to A\geqslant 0$ по мере τ. Так как по неравенству (2) $\tau(A_{1/n})\leqslant 2\tau(B)$, то $\tau(A)\leqslant 2\tau(B)$. Положим $A_Z\overset{\text{def}}{=}A$. Убедимся теперь, что A_Z — искомый оператор. Для любого $Q\in\mathfrak{M}_1$ линеал $D=\bigcup_n(Q\wedge P_{1/n})H$ сильно плотен относительно $\mathfrak{A}_Q$ и, следовательно, таковы же и линеалы $D\cap D(A_Z)$ и $H^Q_{Z^{1/2}}=\mathfrak{R}^Q_{Z^{1/2}}\cap D\cap D(A_Z)$. Для любых $f,\ g\in H^Q_{Z^{1/2}}$ найдется такое n, что $f,\ g\in P_{1/n}H$. Тогда $t(Z^{1/2}f,\ Z^{1/2}g)=(A_{1/n}f,\ g)=(Af,\ g)$. Здесь мы воспользовались равенством $A_{1/n}=P_{1/n}AP_{1/n}$. Итак, $\mathfrak{A}^+_\mu$ — наследственный конус.

Если $P\in\mathfrak{M}$, то существует оператор $A_P=A_PP\in\mathscr{L}^+_2$ такой, что $\mu(Q)=\tau(A_PQ)$ $\forall Q\leqslant P$. Поэтому, как и раньше, устанавливается, что $P\in\mathfrak{A}^+_\mu$. Предложение доказано.

Положим $\mu(X)\overset{\text{def}}{=}+\infty$, если $X\notin\mathfrak{A}^+_\mu$ и $X\in\mathfrak{A}^+$, и $\mu(X)\overset{\text{def}}{=}\tau(A_X)$, если $X\in\mathfrak{A}^+_\mu$. Вспоминая, что $A_Y=AA_XA^*$, $A_{X-Y}=BA_XB^*$, $B^*B+A^*A\overset{\text{def}}{=}P$ — носитель X и $A_XP=A_X$, получаем

$$\mu(X)=\tau(A_XP)=\tau(A_X(B^*B+A^*A))=\tau(BA_XB^*)+\tau(AA_XA^*)=\mu(X-Y)+\mu(X).$$

Таким образом, справедливо

4. Следствие. Интеграл $\mu(\cdot)$ — вес, продолжающий меру μ.

5. Предложение. *Интеграл $\mu:\mathfrak{A}^+_\mu\to R^+$ нормален в следующем смысле: если $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}\subset\mathfrak{A}^+_\mu$ — возрастающая к $X\in\mathfrak{A}^+_\mu$ сеть, то $\mu(X_\alpha)\nearrow\mu(X)$.*

Из специфических свойств интеграла для доказательства этого предложения в [1] понадобилось только равенство $A_{X_\alpha}=AA_XA^*$, если $X^{1/2}_\alpha=X^{1/2}A^*$, которое справедливо и в нашем случае.

Автор благодарен А. Н. Шерстневу за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Луговая Г. Д., Шерстнёв А. Н. О проблеме линейности для неограниченных мер на проекторах.— В сб.: Функц. анализ. Теория операторов. Ульяновск, 1984, с. 76—81.
2. Матвейчук М. С. Максимальные меры на идеалах проекторов и регулярность.— В. сб.: Конструктивн. теория функций и функц. анализ. Казань, 1983, вып. 4, с. 82—87.
3. Segal I. E. A non-commutative extension of abstract integration.— Ann. Math., 1953, v. 53, p. 401—457.
4. Луговая Г. Д., Шерстнёв А. Н. О теореме Глисона для неограниченных мер.— Изв. вузов. Матем., 1980, № 12, с. 30—32.
5. Матвейчук М. С. Конечные заряды в алгебрах Неймана.— В сб.: Конструктивн. теория функций и функц. анализ. Казань, 1981, вып. 3, с. 55—63.
6. Dixmier I. Les algebras d'operateurs dans l'espace Hilbertien. Paris, 1969. 367 p.

г. Казань

Поступила
26.04.1985

А. Н. Пличко, М. М. Попов

УДК 517.982

БАЗИСЫ В НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ПРОСТРАНСТВАХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ — измеримое пространство с конечной положительной мерой μ. Банахово пространство E (классов) измеримых на Ω функций называется симметричным, если 1) из того, что $y\in E$ и $|x(\omega)|\leqslant|y(\omega)|$ вытекает, что $x\in E$ и $\|x\|\leqslant\|y\|$, 2) из $y\in E$ и $d_{|x|}(t)=d_{|y|}(t)$ следует $x\in E$ и $\|x\|=\|y\|$, где $d_{|x|}(t)=\mu\{\omega:|x(\omega)|>t\}$ — функция распределения величины $|x(\omega)|$. Второе условие означает сохранение нормы при всех сохраняющих меру автоморфизмах $\psi:\|x(\omega)\|=\|x(\psi(\omega))\|$. Рассматриваются лишь безатомные вероятностные меры, хотя это ограничение излишнее; многие результаты верны также для σ-конечных мер с атомами. Нас будут интересовать вопросы существования базисов в несепарабельных симметричных пространствах, а также выделения из них гильбертовых подсистем. Основным объектом применений являются пространства почти периодических функций; общие результаты для них конкретизируются. По этой причине рассматриваются комплексные пространства.

Примером вероятностного пространства является декартова степень $D^{\alpha_0}=\{-1,1\}^{\alpha_0}$, α_0 — некоторый ординал со стандартной цилиндрической σ-алгеброй и мерой $\mu(\alpha_0)$ — α_0-й степенью меры $\delta\{1\}=\delta\{-1\}=1/2$. Говорят, что функция x, заданная на D^{α_0}, не зависит от координаты β, если $x(t_0,\ldots,t_\beta,t_{\beta+1},\ldots)=x(t_0,\ldots,t'_\beta,t_{\beta+1},\ldots)$ для любых t_α $(\alpha<\alpha_0)$, t'_β. Измеримая функция может зависеть лишь от счетного множества координат. Для каждого $\beta<\alpha_0$ запишем функцию Радемахера $r_\beta(t)=t_\beta$, $t=(t_0,\ldots,t_\beta,\ldots)\in D^{\alpha_0}$ и функцию Уолша $w_{\beta_1,\ldots,\beta_n}=r_{\beta_1}\cdot r_{\beta_2}\cdot\ldots\cdot r_{\beta_n}$. Существует сохраняющий меру изоморфизм $\varphi_0:D^{\omega_0}\to[0,1]$, ω_0 — первый бесконечный ординал, $\varphi_0(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(t_n+1)^{-(n+2)}$, индуцирующий изометрию $L_1[0,1]$ на $L_1(D^{\omega_0})$, при которой обычные функции Уолша на отрезке переходят в определенные выше. По теореме Магарам [1] (с. 122) всякое вероятностное пространство (Ω,Σ,μ) измеримо изоморфно не более чем счетному дизъюнктному объединению $\bigcup\limits_n(D^{\alpha_n},\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n>0$, $\Sigma_n\varepsilon_n=1$, $(D^{\alpha_n},\varepsilon_n)$ — пространство D^{α_n} с мерой $\varepsilon_n\cdot\mu(\alpha_n)$. Будем отождествлять вероятностное пространство с его разложением Магарам. Пусть $A=(A_1,\ldots,A_n,\ldots)$, A_n — счетное подмножество множества $\{\alpha:\alpha<\alpha_n\}$, где α_n — ординалы, фигурирующие в разложении Магарам пространства Ω. Обозначим через R_{A_n} отображение D^{α_n} в D^{A_n}, ставящее в соответствие элементу $t^n=(t_0^n,\ldots,t_\alpha^n,\ldots)\in D^{\alpha_n}$ элемент $(t_\alpha^n:\alpha\in A_n)$. Определим отображение $\varphi_A:\Omega\to[0,1]$ формулой $\varphi_A(t^n)=\Sigma_{i<n}\varepsilon_i+\varepsilon_n\varphi_0(R_{A_n}(t^n))$; считаем $\varepsilon_0=0$. Очевидно, φ_A является измеримым эпиморфизмом, т. е. $\mu(\varphi_A^{-1}(M))=\lambda(M)$, где λ — лебегова мера множества $M\subset[0,1]$.

Если E — симметричное банахово пространство на $[0,1]$, то измеримые эпиморфизмы $\varphi:\Omega\to[0,1]$ определяют симметричное банахово пространство E_1 на Ω, состоящее из функций $x\varphi(t)$ с нормой $\|x\varphi\|_{E_1}=\|x\|_E$, когда x пробегает элементы E. Действительно, если $x\varphi_1=y\varphi_2$, $\varphi_1,\varphi_2:\Omega\to[0,1]$ — измеримые эпиморфизмы, то $x(s)$ и $y(s)$ имеют одинаковые функции распределения, поэтому определение нормы корректно. Для сохраняющего меру автоморфизма ψ в Ω композиция $\varphi\psi$ является измеримым эпиморфизмом, поэтому $x\varphi\in E_1$ влечет $x\varphi\psi\in E_1$ и $\|x\varphi\|=\|x\varphi\psi\|$. Пусть $x\varphi$, $x'\varphi'\in E_1$. Измеримые функции φ и φ' зависят от счетного множества координат A. Обозначим через $\bar\varphi_A^{-1}(s)$ элемент множества $\varphi_A^{-1}(s)$, у которого все координаты, не принадлежащие A, равны 1. Так определенное отображение $\bar\varphi_A^{-1}$ будет измеримым, $\varphi\bar\varphi_A^{-1}$ и $\varphi'\bar\varphi_A^{-1}$ будут измеримыми эпиморфизмами отрезка на себя, функция $x\varphi\bar\varphi_A^{-1}$ — равноизмеримой с x, а $x'\varphi'\bar\varphi_A^{-1}$ — равноизмеримой с x'. Тогда $x\varphi+x'\varphi'=(x\varphi\bar\varphi_A^{-1}+x'\varphi'\bar\varphi_A^{-1})\times\times\varphi_A\in E_1$ и

$$\|x\varphi+x'\varphi'\|_{E_1}=\|x\varphi\bar\varphi_A^{-1}+x'\varphi'\bar\varphi_A^{-1}\|_E\leqslant\|x\|_E+\|x'\|_E=\|x\varphi\|_{E_1}+\|x'\varphi'\|_{E_1}.$$

Проверим полноту. Пусть последовательность $(x_k\varphi_k)$ фундаментальна и отображения φ_k зависят от координат A. Тогда последовательность $(x_k\varphi_k\bar\varphi_A^{-1})$ фундаментальна в E, следовательно, сходится к некоторому $x\in E$. Поэтому последовательность $x_k\varphi_k=x_k\varphi_k\bar\varphi_A^{-1}\varphi_A$ сходится к $x\varphi_A$ в E_1.

Обратно, для каждого симметричного пространства F на Ω существует такое симметричное пространство E на отрезке, что построенное указанным выше способом для него пространство E_1 на Ω совпадает с F. А именно, это — все функции x на $[0, 1]$, для которых $x\varphi \in F$ при некотором измеримом эпиморфизме $\varphi: \Omega \to [0, 1]$ с нормой $\|x\|_E = \|x\varphi\|_F$.

Действительно, для измеримых эпиморфизмов φ и φ' функции $x\varphi$ и $x\varphi'$ равноизмеримы, так что определение нормы не зависит от выбора φ. Если η — сохраняющий меру автоморфизм в $[0, 1]$, то $x\eta\varphi \in F$ и $\|x\eta\|_E = \|x\eta\varphi\|_F = \|x\|_E$. Пусть $x\varphi$, $x'\varphi \in F$; тогда $x\varphi + x'\varphi \in F$, т. е. $x + x' \in E$ и $\|x + x'\| = \|x\varphi + x'\varphi\| \leqslant \leqslant \|x\varphi\| + \|x'\varphi\| = \|x\| + \|x'\|$.

Будем говорить, что построенное выше пространство E_1 на Ω соответствует пространству E на $[0, 1]$. Пространства E_1 и E_1' на Ω и Ω' будем называть соответствующими друг другу, если построенные для них вышеуказанным способом пространства E и E' на отрезке совпадают. Очевидно, соответствие является отношением эквивалентности.

Предложение 1. *Пусть E_1 — симметричное пространство на вероятностном пространстве* (Ω, Σ, μ), *E — соответствующее ему пространство на отрезке* $[0, 1]$, $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ *и* $L_q(\mu) \subset E_1 \subset L_p(\mu)$ *(вложения непрерывные и плотные). Если пространство E интерполяционно между $L_p[0, 1]$ и $L_q[0, 1]$, (т. е. если любой линейный оператор T, непрерывно отображающий $L_p[0, 1]$ в $L_p[0, 1]$ и $L_q[0, 1]$ в $L_q[0, 1]$, также непрерывно отображает E в E), то пространство E_1 интерполяционно между $L_p(\mu)$ и $L_p(\mu)$. Если, кроме того, для числовой функции $f(s, t)$ и для любого оператора $T: L_p[0, 1] \to L_p[0, 1]$ ($L_q[0, 1] \to L_q[0, 1]$) $\|T\|_E \leqslant f(\|T\|_{L_p}, \|T\|_{L_q})$, то для любого оператора T_1, действующего в пространствах $L_p(\mu)$ и $L_q(\mu)$, верно $\|T_1\|_{E_1} \leqslant f(\|T_1\|_{L_p(\mu)}, \|T_1\|_{L_q(\mu)})$.*

Доказательство. Пусть оператор T_1 ограничен в $L_p(\mu)$ и $L_q(\mu)$, но не в E_1. Тогда существует последовательность (x_k), $\|x_k\|_{E_1} = 1$, $\|T_1 x_k\|_{E_1} \to \infty$. Напомним, что мы отождествляем Ω с его разложением Магарам. Обозначим через A^1 счетное множество координат, от которых зависят (x_k) и $(T_1 x_k)$, а через X^1 — подпространство всех функций из $L_p(\mu)$, зависящих только от координат A^1. Построим индуктивно последовательность счетных множеств координат A^n и подпространств $X^n \subset L_p(\mu)$, состоящих из всех функций, зависящих лишь от координат A^n таких, что $A^n \subset A^{n+1}$, $X^n \subset X^{n+1}$ и $X^n \bigcup T_1 X^n$ зависит лишь от A^{n+1}. Поскольку в пространстве $L_p(\mu)$, $p < \infty$, каждая функция аппроксимируется функциями, зависящими от конечного множества координат, то замыкание $X = \overline{\bigcup_n X_n} \subset L_p(\mu)$ в точности состоит из функций, зависящих от $A = \bigcup_n A^n$, $T_1 X \subset X$ и $(x_k) \bigcup (T_1 x_k) \subset X$.

Определенное выше отображение φ_A индуцирует изометрию $\dot{I}$ $L_p[0, 1]$ на X, $L_q[0, 1]$ на $X \bigcap L_q(\mu)$ и E на $E_1 \bigcap X$. Следовательно, оператор $T = \dot{I}^{-1}(T_1|_X)\dot{I}$ корректно определен, ограничен в $L_p[0, 1]$ и $L_q[0, 1]$, но не в E. Вторая часть предложения доказывается аналогично. ■

Пусть X — банахово пространство и X^* — его сопряженное. Система (x_i, x_i^*), $i \in \dot{I}$, $x_i \in X$, $x_i^* \in X^*$, $\dot{I}$ — некоторое множество индексов, называется базисом Маркушевича (сокращенно М-базисом), если замкнутая линейная оболочка $[x_i : i \in \dot{I}] = X$, $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера), и для всякого $x \in X \setminus \{0\}$ существует $i \in \dot{I}$ с $x_i^*(x) \neq 0$. Поскольку биортогональные функционалы x_i^* в М-базисе однозначно восстанавливаются по элементам x_i, то мы будем иногда называть базисом Маркушевича само множество $(x_i : i \in \dot{I})$. М-базис называется безусловным, если для любого $x \in X$ ряд $\Sigma_{i \in \dot{I}} x_i^*(x) x_i$ сходится к x безусловно. Безусловная базисная константа (супремум норм операторов $\Sigma_{j \in J} x_j^*(x) x_j$, когда J пробегает всевозможные подмножества $\dot{I}$) безусловного базиса конечна. Говорят, что система замкнутых подпространств X_n, $0 \leqslant n < \infty$, пространства Банаха X образует безусловное разложение, если любой элемент $x \in X$ однозначно представим в виде безусловно сходящегося ряда $\Sigma_n x_n$, $x_n \in X_n$. Безусловная константа (супремум норм проекторов на $[X_n : n \in N_1]$ параллельно

$[X_n : n \notin N_1]$, который берется по всем подмножествам N_1 натурального ряда) безусловного разложения также конечна. М-базис называется базисом Энфло-Розенталя (коротко ЭР-базисом), если каждое его счетное подмножество является базисом (Шаудера) в своей замкнутой линейной оболочке при подходящей нумерации индексов. Напомним определение базиса Чезаро. Пусть $(x_n, x_n^*)_{n=0}^{\infty}$ — М-базис сепарабельного банахова пространства X. Положим $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^*(x) x_i$ и $\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^{n} S_i(x)/n$. Если $\|\sigma_n(x) - x\| \to 0$ для любого $x \in X$, то систему (x_n, x_n^*) называют базисом Чезаро пространства X, а число $\sup_n \|\sigma_n\|$ — чезаровской константой. М-базис (x_i, x_i^*) несепарабельного банахова пространства X будем называть базисом Энфло — Розенталя — Чезаро (ЭРЧ), если каждое его счетное подмножество является базисом Чезаро в своей замкнутой линейной оболочке после некоторой перестановки индексов.

Лемма 1. *Подпоследовательность x_{n_k}, $0 \leqslant k < \infty$, базиса Чезаро x_n, $0 \leqslant n < \infty$, является базисом Чезаро своей замкнутой линейной оболочки.*

Доказательство. Множеством мультипликаторов $M(X, (x_n, x_n^*))$ М-базиса (x_n, x_n^*), $0 \leqslant n < \infty$, пространства Банаха X называется совокупность всех числовых последовательностей γ_n, $0 \leqslant n < \infty$, таких, что для каждого $x \in X$ существует $y \in X$ с $\gamma_n x_n^*(x) = x_n^*(y)$ для любого n. Действительную последовательность γ_n называют выпуклой, если $(\gamma_n + \gamma_{n+2})/2 \leqslant \gamma_{n+1}$ при всех n. Следующее утверждение верно как для действительных, так и для комплексных пространств.

Лемма 2 ([2], [3] (с. 368)). *М-базис (x_n, x_n^*) является базисом Чезаро, если и только если его множество мультипликаторов содержит всякую выпуклую сходящуюся к нулю последовательность.*

Согласно лемме 2 достаточно доказать, что для любой сходящейся к нулю выпуклой последовательности γ_{n_k}, $0 \leqslant k < \infty$,

$$(\gamma_{n_k}) \in M([x_{n_k}]_{k=0}^{\infty}, (x_{n_k}, \hat{x}_{n_k}^*)), \tag{1}$$

где $\hat{x}_{n_k}^*$ — сужение функционала $x_{n_k}^*$ на подпространство $[x_{n_k}]_{k=0}^{\infty}$. Построим по $(\gamma_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ последовательность $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \supset (\gamma_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ следующим образом: если $n_k < n < n_{k+1}$, то положим $\gamma_n = \gamma_{n_{k+1}} + (\gamma_{n_k} - \gamma_{n_{k+1}})(n - n_{k+1})/(n_k - n_{k+1})$. Последовательность γ_n выпукла и стремится к нулю. Поскольку x_n — базис Чезаро, то $(\gamma_n) \in M(X, (x_n, x_n^*))$, т. е. для любого $x \in X$ существует $y \in X$ такой, что $\gamma_n x_n^*(x) = x_n^*(y)$ для всех n. В частности, если $x \in [x_{n_k}]_{k=0}^{\infty}$, то $x_n^*(x) = 0$ при $n \neq n_k$ и, следовательно, $x_n^*(y) = 0$ при $n \notin (n_k)_{k=0}^{\infty}$. Поскольку базис Чезаро является сильным М-базисом [3] (с. 357), т. е. $[x_{n_k}]_{k=0}^{\infty} = \{x : x_n^*(x) = 0 \ \forall n \notin (n_k)\}$, то $y \in [x_{n_k}]_{k=0}^{\infty}$. Поэтому $\gamma_{n_k} x_{n_k}^*(x) = x_{n_k}^*(y) = \hat{x}_{n_k}^*(y)$, и включение (1) доказано. ■

Норма $\| \ \|$ симметричного пространства E называется абсолютно непрерывной, если для любого $x \in E$ и любой убывающей последовательности Ω_n измеримых подмножеств Ω с пустым пересечением $\|\chi_{\Omega_n} \cdot x\| \to 0$ при $n \to \infty$ (χ_{Ω_n} — характеристическая функция множества Ω_n).

Мы всегда будем предполагать, что $\chi_\Omega \in E$ и $\|\chi_\Omega\| = 1$.

Лемма 3. *Пусть E — симметричное пространство на $\Omega = \bigcup_n D^{\alpha_n}$. Подпространства E_n, состоящие из функций на Ω, обращающихся в нуль вне D^{α_n}, образуют безусловное разложение E.*

Доказательство леммы не представляет труда.

Теорема 1. *Пусть (Ω, Σ, μ) — вероятностное пространство.*

1. *Если оно однородное, т. е. $\Omega = D^{\alpha}$, то система Уолша w_M (M пробегает конечные подмножества интервала ординалов $(0, \alpha)$) является ЭРЧ-базисом во всяком симметричном пространстве на Ω с абсолютно непре-*

рывной нормой и в пространстве непрерывных функций $C(\Omega)$ на тихоновской степени D^α, а также ортонормированным базисом в $L_2(\Omega)$.

2. *Если $\Omega = \bigcup_n D^{\alpha_n}$, то система Уолша w^n_M (M — конечные подмножества $(0, \alpha_n)$, $1 \leqslant n < \infty$, на D^{α_n}), обращающаяся в нуль вне D^{α_n}, образует M-базис в любом симметричном пространстве E на Ω с абсолютно непрерывной нормой, причем функции w^n_M (M — конечные подмножества $(0, \alpha_n)$) являются ЭРЧ-базисом в подпространстве E_n, описанном в лемме 3, а E_n образуют безусловное разложение E.*

Доказательство 1. Как известно [4], обычная система Уолша w_n на отрезке $[0, 1]$ образует базис Чезаро в $L_1[0, 1]$. Она ортонормирована относительно скалярного произведения, поэтому биортогональные функционалы w^*_n отождествим с w_n. Пусть σ_n — соответствующие чезаровские операторы. Поскольку они ограничены в совокупности в $L_1[0, 1]$, то из соображений двойственности следует, что они ограничены и в $L_\infty[0, 1]$. Тогда по интерполяционной теореме [5] (с. 127) операторы σ_n ограничены в совокупности в любом симметричном пространстве на $[0, 1]$. Поскольку функции Уолша натягивают подпространство, плотное в любом симметричном пространстве с абсолютно непрерывной нормой, то они образуют базис Чезаро в таком пространстве. Согласно лемме 1, любая подпоследовательность системы Уолша будет базисом Чезаро своей замкнутой линейной оболочки. Учитывая рассуждения, приведенные в начале статьи, заключаем, что функции w_M являются ЭРЧ-базисом любого симметричного пространства с абсолютно непрерывной нормой, а также своей замкнутой линейной оболочки в $L_\infty(D^\alpha)$. Эта оболочка совпадает с $C(D^\alpha)$.

2. Этот пункт вытекает из пункта 1, леммы 3 и из того очевидного факта, что если E_n — безусловное разложение E и в каждом подпространстве E_n есть M-базис, то объединение этих M-базисов образует базис Маркушевича всего пространства E. ■

Пусть $w_{n_1, \dots, n_k}$ — функции Уолша на $[0, 1]$, занумерованные множеством $\dot{I}$ всех конечных наборов $(n_1, \dots, n_k)$, $k \geqslant 0$, где $w_{n_1, \dots, n_k} = r_{n_1} \dots r_{n_k}$. Положим $\dot{I}_0 = \{\varnothing\}$ ($w_\varnothing \equiv 1$), $\dot{I}_1 = \{0\}, \dots, \dot{I}_k = \{(n_1, \dots, n_s\ k) : s < k,\ n_j < k$ при $j \leqslant s\}$. Как хорошо известно (см., напр., [6]), при любом $1 < p < \infty$ подпространства $X_k = [w_i : i \in \dot{I}_k]$ образуют безусловное разложение $L_p[0, 1]$ с некоторой безусловной константой A_p. Следующее утверждение, по-видимому, известно.

Лемма 4. *Совокупность функций Уолша, в представлении которых принимает участие ровно k функций Радемахера, в $L_p[0, 1]$, $p \geqslant 1$, эквивалентна стандартному базису пространства l_2.*

Доказательство. Совокупность, определенная в лемме, является подсистемой $k+1$-й системы Олевского — Кетонена, которая образует безусловный базис в $L_p[0, 1]$ при $1 < p < \infty$ [7]. Согласно известным оценкам Орлича и Кадеца [8] ($J_k = \{(n_1, \dots, n_k) : n_i \neq n_j\}$) : $(c^k_p)^{-1} (\Sigma \| a_i w_i \|^2_q)^{1/2} \leqslant \| \Sigma a_i w_i \|_p \leqslant c^k_p \times (\Sigma \| a_i w_i \|^2_r)^{1/2}$, где a_i — произвольный конечный набор скаляров, $i \in J_k$, $q = p$, если $p \leqslant 2$; $q = 2$, если $p > 2$; $r = p$, если $p \geqslant 2$; $r = 2$, если $p \leqslant 2$, а константа c^k_p зависит лишь от p и k. Учитывая $|w_i(t)| \equiv 1$, получим утверждение леммы при $1 < p < \infty$.

Для доказательства леммы при $p = 1$ достаточно воспользоваться следующим утверждением, доказательство которого можно найти, напр., в [9] (с. 66), и его следствием.

Лемма 5. *Пусть $x \in L_4(\mu)$ и $\|x\|_4 < B \|x\|_2$. Тогда $\|x\|_1 > B^{-2} \|x\|_2$.*

Следствие. *Пусть x_n — ортонормированная система в $L_2(\mu)$, $x_n \in L_4(\mu)$ и существует такая константа B, что $\|\Sigma^n_1 a_i x_i\|_4 < B (\Sigma^n_1 |a^2_i|)^{1/2}$ при любом n и любом наборе скаляров (a_i). Тогда $\|\Sigma^n_1 a_i x_i\|_1 \geqslant B^{-2} (\Sigma^n_1 |a_i|^2)^{1/2}$.* ■

Следствие 1. *Для любых $p > 1$ и k подпространство $[w_i : i \in J_k]$ имеет своим дополнением в $L_p[0, 1]$ подпространство $[w_i : i \notin J_k]$.*

Доказательство стандартно и основывается на том, что система $(w_i : i \in J_k)$ эквивалентна естественному базису l_2 в пространстве $L_p[0, 1]$, а в $L_2[0, 1]$ система Уолша ортонормирована.

Следствие 2. *Подпространство* $[w_i : i \in \bigcup_{s=0}^{k} J_s] \subset L_p[0, 1]$, $p > 1$, *изоморфно гильбертову и имеет дополнением* $[w_i : i \notin \bigcup_{s=0}^{k} J_s]$.

Определение нижнего p_E и верхнего q_E индексов Бойда симметричного пространства E на $[0, 1]$ см. в [5] (с. 130). Индексами Бойда p_{E_1}, q_{E_1} симметричного пространства E_1 на вероятностном пространстве (Ω, Σ, μ) называются индексы Бойда соответствующего симметричного пространства E на $[0, 1]$.

Теорема 2. *Пусть E — симметричное пространство на* (Ω, Σ, μ), *причем* $q_E < \infty$. *Тогда имеет место следующее.*

1. *Если пространство Ω однородное, т. е. $\Omega = D^\alpha$, то для любого k подмножество $W^k = \{w_{\beta_1, \ldots, \beta_k}\}$ системы Уолша на D^α, состоящее из функций, в представление которых входит ровно k функций Радемахера, эквивалентно стандартному базису гильбертова пространства. Если, кроме того, $p_E > 1$, то замкнутая линейная оболочка этого подмножества имеет в E дополнением замкнутую линейную оболочку остальных функций Уолша, а все вместе функции Уолша образуют базис Энфло — Розенталя в E.*

2. *Если $\Omega = \bigcup_n D^{\alpha_n}$, то система w_M^n, определенная в теореме 1, разбивается на счетное множество подсистем, каждая из которых эквивалентна ортогональному базису гильбертова пространства. Если, кроме того, $p_E > 1$, то эти подсистемы натягивают дополняемые подпространства, а вся система w_M^n образует ЭР-базис в E.*

Доказательство. 1. То, что подсистема W^k в $L_r(D^\alpha)$, $r < \infty$, эквивалентна гильбертовой, следует из леммы 4 и определения функции φ_0 в начале статьи. Поэтому она эквивалентна гильбертовой и в любом промежуточном между $L_1(D^\alpha)$ и $L_q(D^\alpha)$ пространстве. Поскольку $L_{q_E}(\mu) \subset E \subset L_{p_E}(\mu)$ (вложения непрерывные) [5] (с. 132), то подсистема W_k эквивалентна гильбертовой и в E. Дополняемость системы W^k в $L_r(D^\alpha)$, $1 < r < \infty$, вытекает, по сути, из следствия 1 леммы 4; ее дополняемость в симметричном пространстве E, для которого $1 < p_E$, $q_E < \infty$, следует из интерполяционной теоремы Бойда [5] (с. 145) и предложения 1. Как известно [6], система Уолша образует в любом пространстве $L_r(D^\alpha)$, $1 < r < \infty$, ЭР-базис. По интерполяции [5] (с. 145) и предложению 1 она образует ЭР-базис и в любом симметричном пространстве E на D^α, если $1 < p_E$, $q_E < \infty$.

2. Этот пункт следует, по сути, из п. 1. ■

Следствие 3. *Пусть E_1 и E_2 — симметричные пространства с индексами Бойда, отличными от 1 и ∞. Тогда существует непрерывный линейный инъективный оператор из E_1 в E_2 с плотным образом.*

Доказательство. Согласно теореме 2, система w_M^n разбивается на счетное множество подсистем $\{w_{M_k}^{n_k}\}$, $0 \leqslant k < \infty$, каждая из которых эквивалентна ортогональному базису гильбертова пространства как в пространстве E_1, так и в E_2. Пусть c_1^k и c_2^k — соответствующие константы эквивалентности. Положим $Aw_{M_k}^{n_k} = w_{M_k}^{n_k}/c_1^k \cdot c_2^k \cdot 2^k$. Легко видеть, что этот оператор продолжается по линейности и непрерывности до искомого отображения E_1 в E_2. ■

Следующая лемма является простой модификацией рассуждений [6].

Лемма 6. *Пусть E — пространство функций на D^α, $\alpha \geqslant \omega_n$ (ω_n есть n-й бесконечный кардинал), которому принадлежат все функции Уолша и образуют в нем М-базис. Пусть T — изоморфизм из E в банахово пространство X с М-базисом (x_i, x_i^*), $i \in I$. Предположим, что при любом i образ $T^* e_i^*$ аннулируется на всех w_M, за исключением, быть может, счетного числа. Тогда найдутся такие функции Радемахера $r_{\beta_1}, \ldots, r_{\beta_n}$, что порожденные ими функции Уолша $w_1, \ldots, w_{2^n}$ обладают свойством: существуют счетные* *непересекающиеся подмножества $\dot{I}_1, \ldots, \dot{I}_{2^n}$ из $\dot{I}$, для которых $Tw_k \in [e_i : i \in \dot{I}_k]$ при любом $k \leqslant 2^n$.*

Теорема 3. *Пусть E_0 — симметричное банахово пространство, плотность (наименьшая мощность плотных подмножеств)* $\operatorname{dens} E_0$ *которого не меньше $\aleph_{\omega_0}$. Если оно изоморфно вкладывается в пространство с безусловным базисом, то это $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$.*

Доказательство. Если норма на E_0 не абсолютно непрерывна, то, как хорошо известно и легко проверяется, E_0 содержит изоморфную копию l_∞. Пространство l_∞, что также хорошо известно, не вложимо в пространство с безусловным базисом. Итак, пусть норма абсолютно непрерывна и $\Omega = \bigcup_n (D^{\alpha_n}, \varepsilon_n)$ — разложение Магарам. Согласно лемме 3, подпространства E_n, определенные в этой лемме, образуют безусловное разложение E_0. Тогда для любого k хотя бы одно из пространств E_{n_k} имеет плотность не меньше $\aleph_k$. Достаточно доказать, что если T — вложение E_0 в пространство с безусловным базисом, то для сужения $T|_{E_{n_k}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|T|_{E_{n_k}}\| \cdot \|(T_{E_{n_k}})^{-1}\| = \infty$ при $E_0 \neq L_2$.

Проверим выполнение условий леммы 6 для E_{n_k}. Действительно, все функции Уолша, как ограниченные измеримые функции, принадлежат E_{n_k}. Пусть E — симметричное пространство на $[0, 1]$, соответствующее E_{n_k}. Каждая функция из E_{n_k} интегрируема, поскольку интегрируема каждая функция из E [5] (с. 118). Поэтому функционалы $w_M^*(x) = \int\limits_{D^\alpha} x(t)\, w_M(t)\, d\mu(t)$, биортогональные к w_M, принадлежат $E_{n_k}^*$. Поскольку обычные функции Уолша на $[0, 1]$ образуют M-базис в любом симметричном пространстве с абсолютно непрерывной нормой, то это же верно и для w_M. Каждый функционал $x^* \in E_{n_k}^*$ имеет вид $x^*(x) = \int x_0(t)\, x(t)\, d\mu(t)$, где $x_0(t)$ — некоторая измеримая функция [5] (с. 29). Измеримая функция зависит лишь от счетного множества координат, так что x^* аннулируется на всех элементах w_M, за исключением, быть может, счетного числа.

Таким образом, можно применить лемму 6. Из нее, в частности, следует, что безусловная константа набора $w_1, \ldots, w_{2^k}$ ограничена числом, зависящим лишь от безусловной константы базиса (e_i) и от величины $\|T|_{E_{n_k}}\| \cdot \|(T|_{E_{n_k}})^{-1}\|$. Если бы эти величины были ограничены в совокупности, то система Уолша была бы безусловным базисом соответствующего пространства E на $[0, 1]$. А это возможно лишь при $E = L_2[0, 1]$ (см., напр., [10]). Поэтому $E_{n_k} = L_2 \times (D^{\alpha_{n_k}})$ и $E_0 = L_2(\Omega)$. ■

Напомним, что пространством равномерно почти периодических функций AP называется пополнение линейной оболочки комплексных функций $x_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$ действительного аргумента t, $\lambda \in R$, по норме супремум, а пространством почти периодических функций Безиковича B_p, $1 \leqslant p < \infty$, — пополнение этой же оболочки по норме $\|x\| = \lim\limits_{T\to\infty} ((2T)^{-1} \int_{-T}^{T} |x(t)|^p\, dt)^{1/p}$. Функции x_λ образуют M-базис в AP и B_p и ортогональный базис гильбертова пространства B_2. Существует компактная абелева группа R_0 и такая биекция J из R на плотное подмножество R_0, что $J(t_1 + t_2) = J(t_1) \cdot J(t_2)$ для любых $t_1, t_2 \in R$ (операция в R_0 записывается мультипликативно). Отображение J индуцирует изометрию $\dot{I}: C(R_0) \to AP$ по формуле $(\dot{I}y)(t) = y(J(t))$. Оператор $\dot{I}$ продолжается до изометрии $L_p(R_0, \mu) \to B_p$, μ — нормированная мера Хаара на группе R_0 (см. [11]).

Введем понятие симметричного пространства почти периодических функций, обобщающее понятие пространства Безиковича и пространства Безиковича — Орлича [12].

Пусть E — симметричное пространство с абсолютно непрерывной нормой на $[0, 1]$. Обозначим через J_T линейное отображение отрезка $[-T, T]$ на $[0, 1]$,

$J_T(-T)=0$, $J_T(T)=1$. Все функции $x(J_T(t))$, когда x пробегает E, образуют симметричное пространство E_T на $[-T, T]$ с нормированной мерой Лебега $\lambda_T[-T, T]=1$; норма определяется как $\|xJ_T\|_{E_T}=\|x\|_E$. Таким образом, для каждой ограниченной измеримой функции $x(t)$ на прямой определена полунорма $\|x\|_{E_T}=\|x(t)|_{[-T, T]}\|_{E_T}$. Обозначим через $\boldsymbol{E}_{AP}$ пополнение линейной оболочки функций x_λ по норме

$$\|x\|_{E_{AP}}=\lim_{T\to\infty}\|x\|_{E_T}. \tag{2}$$

Естественно необходимо проверить существование такого предела.

Лемма 7 [13] (с. 546). *Пусть $\Omega\subset R_0$ — открытое множество и*

$$\mu(\Omega)=\mu(\overline{\Omega}). \tag{3}$$

Тогда $\mu(\Omega)=\lim\limits_{T\to\infty}(2T)^{-1}\int\limits_{-T}^{T}\chi_\Omega(J(t))\,dt.$

Пусть E_1 — симметричное пространство на R_0, соответствующее E.

Лемма 8. *Пусть Ω_i, $1\leqslant i\leqslant m$, — открытые, попарно не пересекающиеся подмножества R_0 со свойством* (3), *причем $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Omega_i)=c<1$. Тогда для любой функции $y(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\chi_{\Omega_i}(\omega)$, a_i — комплексные числа, существует предел*

$$\lim_{T\to\infty}\|yJ\|_{E_T}=\|y\|_{E_1}. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно лемме 7, для любого n найдется такое число T_n, что

$$\left|\mu(\Omega_i)-\frac{1}{2T_n}\int\limits_{-T_n}^{T_n}\chi_{\Omega_i}(J(t))\,dt\right|<\frac{1-c}{2m}\cdot\frac{1}{n} \tag{5}$$

при любом $i\leqslant m$. Поскольку $\chi_{\Omega_i}J(t)|_{[-T_n, T_n]}$ — характеристическая функция некоторого подмножества R_i^n и $(R_i^n)_{i=1}^m$ попарно не пересекаются, то существуют такие подмножества $S_n^i\subset[-T_n, T_n]$, что

$$\mu(\Omega_i)=\frac{1}{2T_n}\int\limits_{-T_n}^{T_n}\chi_{S_n^i}(t)\,dt=\lambda_{T_n}(S_n^i) \tag{6}$$

при любом i и

$$\lambda_{T_n}(R_n^i\triangle S_n^i)<\frac{1-c}{2m}\cdot\frac{1}{n}.$$

В силу (5) множества $(S_n^i)_{i=1}^m$ можно выбрать попарно непересекающимися. Отсюда и из (6) следует, что величины $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\chi_{\Omega_i}(\omega)$ и $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i\chi_{S_n^i}(t)$ имеют равные функции распределения. Кроме того, E_1 и E_{T_n} соответствуют друг другу. Легко видеть, что если две величины из соответствующих друг другу пространств имеют равные функции распределения, то их нормы равны. Поэтому

$$\left|\|y\|_{E_1}-\|yJ\|_{E_{T_n}}\right|\leqslant\left|\|y\|_{E_1}-\|\sum_{i=1}^{m}a_i\chi_{S_n^i}\|_{E_{T_n}}\right|+\|\sum_{i=1}^{m}a_i(\chi_{S_n^i}-\chi_{R_n^i})\|_{E_{T_n}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}|a_i|\,\|\chi_{(R_n^i\triangle S_n^i)}\|_{E_{T_n}}=\sum_{i=1}^{m}|a_i|\,\|\chi_{J_{T_n}(R_n^i\triangle S_n^i)}\|_E.$$

Поскольку норма E абсолютно непрерывна и $\lim_{n\to\infty}\lambda(J_{T_n}(R_n^i \triangle S_n^i))=0$ для любого i (λ — мера Лебега на $[0, 1]$), то $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m}|a_i|\|\chi_{J_{T_n}(R_n^i\triangle S_n^i)}\|_E=0$. Отсюда легко вывести (4). ■

Таким образом, J порождает изометрию $\dot{I}$ линейного подпространства $Y\subset E_1$, состоящего из функций y, удовлетворяющих условиям леммы 8, с нормой E_1 на функции вида $yJ(t)$ с нормой $\lim_{T\to\infty}\|yJ\|_{E_T}$.

Теорема 4. *Отображение $\dot{I}$ однозначно продолжается до изометрии $\dot{I}$ из E_1 на E_{AP}.*

Доказательство. Надо показать, что оператор $\dot{I}$ плотно определен и $\overline{\dot{I}E_1}=E_{AP}$. Пусть $u(\omega)$ — любая непрерывная действительная функция на R_0. Тогда $u(R_0)=[a, b]$ и множество $M=\{t:\mu\{\omega:u(\omega)=t\}>0\}$ счетно. Пусть $a<t_1<\ldots<t_k<b$ есть ε-покрытие отрезка $[a, b]$, $t_i\notin M$. Множества $\Omega_i=\{\omega:t_i<u(\omega)<t_{i+1}\}$, $1\leqslant i\leqslant k-1$, открыты, а их замыкания содержатся в множествах $\widetilde{\Omega}_i=\{\omega:t_i\leqslant u(\omega)\leqslant t_{i+1}\}$. Поскольку $t_i\notin M$, то $\mu(\Omega_i)=\mu(\widetilde{\Omega}_i)$, следовательно, $\mu(\Omega_i)=\mu(\overline{\Omega}_i)$. Таким образом, функция $u_\varepsilon(\omega)=t_i$, если $t_i<u(\omega)<t_{i+1}$, $i=1, k-1$ и $u_\varepsilon(\omega)=0$ для остальных ω, принадлежит множеству Y. В силу абсолютной непрерывности нормы пространства E_1 $\|u-u_\varepsilon\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Итак, каждая действительная непрерывная функция на R_0 принадлежит замыканию множества Y в E_1. Из линейности следует, что любая непрерывная комплексная функция на R_0 также принадлежит этому замыканию. Поскольку пространство непрерывных функций на компакте с регулярной мерой (а мера Хаара такова) плотно в симметричном пространстве на этом компакте с абсолютно непрерывной нормой, то $\overline{Y}=E_1$. Таким образом, оператор $\dot{I}$ распространяется по непрерывности на E_1. Кроме того, поскольку $\widetilde{\dot{I}}(C(R_0))=AP$, то $\widetilde{\dot{I}E_1}=E_{AP}$. Заметим также, что доказательство теоремы включает доказательство существования предела в (2). ■

Лемма 9. *Бесконечная компактная абелева группа Ω с нормированной мерой Хаара является безатомным однородным вероятностным пространством.*

Доказательство. Пусть $\omega_n\in\Omega$, $n=0, \infty$, $\omega_n\neq\omega_m$ при $n\neq m$ и $\mu(\omega_0)>0$. Тогда, согласно инвариантности меры μ, $\mu(\omega_n)=\mu((\omega_n\omega_0^{-1})\omega_0)=\mu(\omega_0)$. Следовательно, $\mu(\Omega)=\infty$, что противоречит нормированности. Таким образом, мера μ безатомна.

Как известно [14], каждая компактная абелева группа изоморфна прямому произведению некоторого семейства групп, которые либо конечны, либо изоморфны окружности. Такое произведение однородно [1] (с. 122).

Приведем теперь следствия из полученных результатов для пространств почти периодических функций.

Теорема 5. 1. *Пространство AP имеет ЭРЧ-базис.*

2. *Существует семейство функций $w_i:i\in\dot{I}$ на прямой, которое:*

а) *является ортонормированным базисом в пространстве B_2 и $|w_i(t)|\equiv 1$;*

б) *образует ЭРЧ-базис в любом симметричном пространстве почти периодических функций с абсолютно непрерывной нормой;*

в) *распадается на счетное число гильбертовых подсемейств: $\dot{I}=\bigcup_n\dot{I}_n$ во всяком симметричном пространстве почти периодических функций E_{AP}, для которого верхний индекс Бойда соответствующего пространства E на отрезке меньше бесконечности;*

г) *если для E_{AP} индексы Бойда соответствующего пространства E на отрезке отличны от 1 и ∞, то подпространство $[w_i:i\in\dot{I}_n]$ дополняемо в E_{AP}, а семейство $w_i:i\in\dot{I}$ образует там базис Энфло — Розенталя.*

3. *В тех аксиоматиках теории множеств, где $c>\aleph_{\omega_0}$, симметричное*

пространство E_{AP} вкладывается изоморфно в пространство с безусловным базисом, лишь когда $E_{AP}=B_2$.

В объяснении нуждается лишь п. 1. Он вытекает из теоремы 1.1 и изоморфизма пространств AP и $C(D^c)$ [15] (с. 65).

Теорема 6. *Пусть E_{AP} — симметричное пространство почти периодических функций с абсолютно непрерывной нормой. Тригонометрические функции образуют базис Маркушевича в этом пространстве, а полиномы Бохнера — Фейера функции из E_{AP}* (определение см. в [16]) *сходятся к ней по норме.*

Доказательство. Операторы Бохнера — Фейера сильно сходятся к единичному оператору в пространствах AP и B_1. Из ограниченности операторов Бохнера — Фейера в $B_1=L_1(R_0)$ следует их ограниченность в $B_1^*=L_\infty(R_0)$. По интерполяции [5] (с. 127) и предложению 1 они ограничены также и в E_{AP} и сходятся там к единичному оператору. ■

Авторы благодарны Е. В. Токареву за ценные консультации.

г. Львов
г. Черновцы

Поступила
02.04.1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Lacey H. E. The isometric theory of classical Banach spaces. Berlin-Heidelberg — New York, 1974. 270 p.
2. Кадец М. И. Базисы и их пространства коэффициентов.— ДАН УССР, 1964, т. 9, с. 1139—1141.
3. Singer I. Bases in Banach spaces. II. Berlin e. a., 1981. 880 p.
4. Morgenthaler G. Walsh — Fourier series.— Trans. Amer. Math. Soc., 1957, v. 84, № 2, p. 472—507.
5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. II. Berlin e. a., 1979. 243 p.
6. Enflo P., Rosenthal H. P. Some results concerning $L^p(\mu)$-spaces.— J. Funct. Anal., 1973, v. 14, p. 325—348.
7. Ketonen T. On unconditionality in L_p-spaces.— Ann. acad. sci. fenn., 1981, Ser. A, № 35, p. 1—42.
8. Dor L. E., Starbird T. Projections of L_p into subspaces spanned by independent random variables.— Compositio Math., 1979, v. 39, № 2, p. 141—175.
9. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, I.— Ergeb. Math., 1977, 92, XIII. 190 p.
10. Токарев Е. В. О подпространствах некоторых симметричных пространств. — В сб.: Теория функций, функц. анализ и их прилож., 1975, т. 24, с. 156—161.
11. Semadeni Z. Generalizations of Bohr's theorem on Fourier series with independent characters.— Studia math., 1963, t. 23, № 2, s. 150—179.
12. Albrycht J. Some remarks on the Marcinkiewicz — Orlicz space.—Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, t. 7, № 1, s. 11—12.
13. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. М., 1975. Т. 1. 654 с.
14. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения. М., 1950. 187 с.
15. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их приложения. М., 1970. 143 с.
16. Besicovith A. S., Bohr O. Almost periodicity and general trigonometric series.— Acta Math., 1931, v. 51, p. 203—292.

г. Черновцы

Поступила
09.07.1985

И. Ш. Славутский

УДК 511.682

p-АДИЧЕСКИ НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ УЕХАРА И СРАВНЕНИЕ ВОРОНОГО

Кубота и Леопольдт ввели p-адические дзета функции в связи с исследованием инвариантов полей алгебраических чисел, определив с помощью чисел Бернулли L-функции на Z_p заданием значений на некотором плотном в Z_p