ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1985 МАТЕМАТИКА № 6 (277)

В. А. Винокуров, Л. В. Гладун, А. Н. Пличко УДК 517.988

О НОРМИРУЮЩИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ СОПРЯЖЕННОГО ПРОСТРАНСТВА И РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ ОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Рассмотрим линейное непрерывное инъективное отображение A банахова пространства X в нормированное пространство Y. Обратный оператор A^{-1} называется регуляризуемым по Тихонову, если существует семейство отображений $R_\delta: Y \to X$, $0 < \delta < \delta_0$, таких, что для всякого $x \in X$ $\sup\{\|x - R_\delta y\| : \|y - Ax\| \leqslant \delta\} \to 0$ при $\delta \to 0$. Если все отображения R_δ линейны (линейны и конечномерны), то оператор считается линейно (линейно конечномерно) регуляризуемым. Центральную роль при выяснении условий регуляризуемости обратного A^{-1} играет понятие нормирующего подпространства. Напомним, что подпространство F сопряженного пространства X^* называется нормирующим, если функционал $|||x||| = \sup\{|f(x)| : f \in F, \ \|f\| \leqslant 1\}$ является нормой, эквивалентной исходной норме $\| \ \|$ пространства X. Хорошей иллюстрацией к этому утверждению является следующая

Теорема 1. *Пусть A — линейный непрерывный инъективный оператор из* WCG-*пространства X в нормированное пространство Y. Следующее эквивалентно*:

1) *подпространство $F = A^*Y^* \subset X^*$ нормирующее*;

2) *оператор A^{-1} регуляризуем*;

3) *A^{-1} — аналитически представимая функция первого класса*;

4) *A^{-1} — B-измеримая функция первогокласса;*

5) *слабое* секвенциальное замыкание $F_{(1)} = X^*$.*

Если, кроме того, Y банахово и подпространство $Y_1 = AX \subset Y$ плотно, то эти условия эквивалентны условию

6) *пространства Y_1 (с нормой $\|y\|_1 = \|A^{-1}y\|_X$) и Y почти родственны в смысле теории интерполяции линейных операторов* [1] (с. 125).

Определения других используемых в формулировке теоремы и в дальнейшем тексте понятий можно найти в [1]. В этой работе мы исследуем некоторые свойства нормирующих подпространств, связь их с регуляризуемостью, а также изучим линейную конечномерную регуляризуемость в некоторых конкретных пространствах.

2. Начнем с общих свойств нормирующих и ненормирующих подпространств. Один из первых общих результатов о существовании тотальных ненормирующих подпространств [2] утверждал, что если неквазирефлексивное банахово пространство X содержит бесконечномерное рефлексивное подпространство, то в X^* существует тотальное ненормирующее подпространство. Как сейчас известно, условие существования рефлексивного подпространства тут излишне. Но оно позволяет получить более точный результат.

Теорема 2. *Пусть X — неквазирефлексивное банахово пространство, содержащее бесконечномерное рефлексивное подпространство R. Тогда существует такое замкнутое по норме тотальное подпространство $F \subset X^*$, что каждое замкнутое по норме подпространство $G \supset F$ бесконечного дефекта в X^* ненормирующее.*

Доказательство принципиально не отличается от доказательства упомянутого результата Ю. И. Петунина. Поскольку пространство X неквазирефлексивно, то в X^* существует замкнутое по норме тотальное ненормирующее подпространство H. Его аннулятор $H^\perp \subset X^{**}$ бесконечномерен, слабо* замкнут и пересекается с X по нулю. Мы, как обычно, отождествляем пространство X

с его каноническим образом во втором сопряженном. Выберем в подпространствах $H^{\perp}$ и R нормированные базисные последовательности φ_n и r_n, $n=\overline{1, \infty}$ [3] (с. 4). Легко показать (см., напр., [3], с. 6), что при положительных числах $\alpha_n < 1/(2^n \| r_n^* \|)$, где r_n^* — биортогональные функционалы к элементам r_n, система $\psi_n = r_n + \alpha_n \varphi_n$ является базисной, а отображение $\sum a_n \psi_n \to \sum a_n r_n$ из замкнутой по норме линейной оболочки $\Psi = [\psi_n]_1^\infty$ на $[r_n]_1^\infty$—изоморфизмом. Поэтому подпространство Ψ рефлексивно и, следовательно [4], слабо* замкнуто. Покажем, что $\Psi \cap X = 0$. Пусть элемент $\psi \in \Psi \cap X$. Он раскладывается в ряд

$$\psi = \sum_1^\infty a_n (r_n + \alpha_n \varphi_n) = \sum_1^\infty a_n r_n + \sum_1^\infty \alpha_n a_n \varphi_n .$$

Поскольку последовательность a_n ограничена, то третий ряд сходится абсолютно, а поэтому и второй сходится и выполняется написанное равенство. Но элемент $\sum\limits_1^\infty a_n r_n \in X$, следовательно, и $\sum\limits_1^\infty a_n \alpha_n \varphi_n \in X$, что возможно лишь в случае $a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0$. Так что слабо* замкнутое подпространство Ψ пересекается с X по нулю, а поэтому его аннулятор $F \subset X^*$ тотален на X. Пусть теперь $G \supset F$ — замкнутое по норме подпространство бесконечного дефекта в X^*. Поскольку подпространство Ψ слабо* замкнуто, то $F^{\perp} = \Psi$, следовательно, $G^{\perp}$ — бесконечномерное подпространство Ψ.

Нетрудно проверить, что

$$d(S(X), G^{\perp}) = \inf \{ \| x - \psi \| : x \in X, \ \| x \| = 1, \ \psi \in G^{\perp} \} = 0. \tag{1}$$

Действительно, для каждого n существует элемент $v_n \in [\psi_k]_n^\infty \cap G^{\perp}$, $\| v_n \| = 1$. Элемент v_n раскладывается в ряд $v_n = \sum\limits_{k=n}^\infty a_k^n \psi_k = x_n + z_n$, $x_n = \sum\limits_{k=n}^\infty a_n^k r_k \in X$, $z_n = \sum\limits_{k=n}^\infty a_k^n \alpha_k \varphi_k$. Поскольку числа a_k^n ограничены одной константой, не зависящей от n и k, то $\| z_n \| \to 0$. Следовательно, $\| x_n / \| x_n \| - v_n / \| x_n \| \, \| \to 0$ и (1) выполняется. По одному из эквивалентных определений [1] (с. 32) равенство (1) и означает ненормируемость подпространства G.

Покажем, что требование наличия в пространстве X бесконечномерного рефлексивного подпространства в теореме 2 существенно.

Пример 1. Пусть $X = c_0$ — пространство сходящихся к нулю последовательностей. Тогда для всякого замкнутого по норме тотального ненормирующего подпространства $F \subset X^* = l_1$ существует замкнутое по норме нормирующее подпространство $G \supset F$ бесконечного дефекта в X^*.

Покажем сначала, что из стандартного базиса e_i пространства c_0 можно выбрать блок-базисную последовательность $x_n = \sum\limits_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} \alpha_i^n e_i$, i_n — возрастающая последовательность натуральных чисел, $\| x_n \| = 1$, для которой существует последовательность элементов $\varphi_n \in F^{\perp} \subset X^{**}$, $\| \varphi_n \| = 1$ и $\| x_n - \varphi_n \| < 2^{-(n+1)}$. Поскольку тотальное подпространство F ненормирующее, то $F^{\perp} \cap X = 0$, и расстояние $d(S(X), S(F^{\perp}))$ между соответствующими единичными сферами равно нулю. Поэтому для каждого n расстояние

$$d(S(\operatorname{lin}(e_i)_{i=n}^\infty), \ S(F^{\perp})) = 0, \tag{2}$$

lin — линейная оболочка. Тогда существуют такие элементы $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{i_2} \alpha_i^1 e_i \in X$ и $\varphi_1 \in F$, что $\| x_1 \| = \| \varphi_1 \| = 1$ и $\| x_1 - \varphi_1 \| < 2^{-2}$. Если для n требуемые элементы построены, то, пользуясь формулой (2), выберем $x_{n+1} = \sum\limits_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} \alpha_i^{n+1} e_i$ и $\varphi_{n+1} \in F^{\perp}$

с требуемыми свойствами. Легко видеть, что для любой ограниченной последовательности c_n ряд $\sum\limits_1^\infty c_n x_n$ слабо* сходится в пространстве X^{**}. Тогда слабо* сходится ряд $\sum\limits_1^\infty c_n\varphi_n = \sum\limits_1^\infty c_n x_n + \sum\limits_1^\infty c_n(\varphi_n - x_n)$, ибо последний ряд сходится абсолютно. Поскольку

$$\left\|\sum_1^\infty c_n\varphi_n\right\| \leqslant \left\|\sum_1^\infty c_n x_n\right\| + \left\|\sum_1^\infty c_n(\varphi_n - x_n)\right\| < \frac{3}{2}\max_n |c_n|$$

и

$$\left\|\sum_1^\infty c_n\varphi_n\right\| \geqslant \left\|\sum_1^\infty c_n x_n\right\| - \left\|\sum_1^\infty c_n(\varphi_n - x_n)\right\| > \frac{1}{2}\max_n |c_n|,$$

то слабое* замыкание $\Phi = \mathrm{cl}^*[\varphi_n]_1^\infty$ содержит подпространство, изоморфное l_∞.

Так как пространство l_∞ универсально в классе всех сепарабельных пространств, то Φ содержит бесконечномерное рефлексивное подпространство R. Хорошо известно, что c_0 не имеет бесконечномерных рефлексивных подпространств. Поэтому пересечение $R\cap X$ конечномерно; можно считать, что вообще $R\cap X = 0$. Более того, расстояние $d(S(R),\ S(X)) > 0$, иначе бы мы, проведя точно такие же рассуждения, как и выше, выбрали в R и X два бесконечномерных изоморфных подпространства. Рефлексивное подпространство $R\subset F^\perp$ слабо* замкнуто. Поэтому аннулятор $R^\top \subset X^*$ содержит F, является нормирующим подпространством и имеет в X^* бесконечный дефект.

Пусть Y — подпространство банахова пространства X и $R: X^*\to Y^*$ — оператор сужения функционалов из X^* на Y. Тогда прообраз $R^{-1}G$ каждого нормирующего подпространства $G\subset Y^*$ есть нормирующее подпространство в X^* [5] (лемма 3), точнее, если характеристика $r(G)$ подпространства G равна a, то $r(R^{-1}G)\geqslant \lambda a$, $\lambda = 1/3$. (Определение характеристики см. ниже.) Точное значение константы λ неизвестно. Следующий пример показывает, что в общем случае она не превышает $1/2$.

Пример 2. Пусть X — подпространство $l_\infty(M)$, где $M = \{-1\}\cup\{0\}\cup N$, N — натуральные числа, натянутое на множество $c_0(N)$ и элементы $e_0: e_0(m) = 1$, $m\in M$, и $e_{-1}: e_{-1}(-1) = 1$, $e_{-1}(0) = -1$, $e_{-1}(n) = 0$, $n\in N$. Определение пространств $c_0(M)$, $l_1(M)$ и $l_\infty(M)$ можно найти, напр., в [1] (с. 7). Рассмотрим подпространство $Y = c_0(N)\oplus[e_0]\subset X$. Как легко проверить, сопряженное к X можно отождествить с пространством $l_1(M)$, двойственность задается стандартно

$$f(x) = \sum_{m\in M} f(m)\,x(m),\quad f\in X^*,\ x\in X.$$

Сопряженным Y^* к подпространству Y будет фактор-пространство $X^*/Y^\perp = l_1(M)/[f_{-1}]$, где функция $f_{-1}(m)$ задается равенствами $f_{-1}(-1) = 1$, $f_{-1}(0) = -1$, $f_{-1}(n) = 0$, $n\in N$.

Легко проверить, что для подпространства $F = l_1(N)\oplus[f_{-1}]\subset X^*$ характеристика фактор-пространства $G = F/[f_{-1}]\subset Y^*$ равна единице. Подсчитаем характеристику подпространства F по формуле

$$r(F) = \inf_{x\in X,\ \|x\|=1} \sup\{|f(x)| : f\in F, \|f\|\leqslant 1\}. \tag{3}$$

Покажем сначала, что $r(F)\geqslant 1/2$. Возьмем произвольный элемент $x\in X$, $\|x\| = 1$. Если существует последовательность элементов $n_k\in N$ таких, что $|x(n_k)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, то для функционалов $f_{n_k}\in F$: $f_{n_k}(m) = 0$ при $m\neq n_k$ и $f_{n_k}(n_k) = 1$, $\|f_{n_k}\| = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} |f_{n_k}(x)| = 1$. Остается рассмотреть случай, когда $\sup\{|x(n)| : n\in N\} < 1$.

Тогда либо $|x(0)|=1$, либо $|x(-1)|=1$. Если $\operatorname{sign} x(0) \neq \operatorname{sign} x(-1)$, то для функционала $f_{-1}/2 \in F$ норма $\|f_{-1}/2\|=1$ и $|(f_{-1}/2)(x)| \geqslant 1/2$. Из конструкции пространства X следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x(n)=(x(-1)+x(0))/2,$$

поэтому если $\operatorname{sign} x(-1)=\operatorname{sign} x(0)$, то этот предел по модулю больше 1/2 и $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| \geqslant 1/2$. Таким образом, $r(F) \geqslant 1/2$. Но для элемента $x_0=(e_0-e_{-1})/2$ и произвольного функционала $f \in F$, $\|f\|=1$, имеем

$$|f(x)|=\left|f(0)+\frac{1}{2}\sum_1^\infty f(n)\right| \leqslant |f(0)|+\frac{1}{2}\sum_1^\infty |f(n)|.$$

Поскольку функционал f имеет вид $f=\alpha f_{-1}+f_0$, $f_0 \in l_1(N)$, $\|f\|=2|\alpha|+\|f_0\|$ и $|f(0)|=|\alpha|$, $\|f_0\|=\sum\limits_1^\infty |f(n)|$, то $|f(x)| \leqslant 1/2$. Таким образом, $r(F)=1/2$.

3. Напомним, что банахово пространство называется WCG-пространством, если оно является замкнутой линейной оболочкой своего слабого компакта. Любое сепарабельное, рефлексивное или квазирефлексивное пространство будет WCG. Следующее утверждение по сути обобщает теорему М. И. Кадеца о введении на сепарабельном банаховом пространстве эквивалентной нормы с H_{Γ}-свойством [6].

Лемма 1. *Пусть A — линейный непрерывный инъективный оператор из WCG-пространства X в нормированное пространство Y и подпространство $F=A^*Y^* \subset X^*$ нормирующее. Тогда на X можно ввести эквивалентную норму $\|\ \|_0$, для которой*

(✳) *из $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_0 \leqslant \|x\|_0$ и $\|A(x_n-x)\| \to 0$ следует $\|x_n-x\| \to 0$.*

Доказательство основано на перенормировочной технике С. Троянского подобно тому, как это сделано в [7]. Поскольку подпространство F нормирующее, то норма $|x|=\sup\{f(x): f \in F,\ \|f\| \leqslant 1\}$ эквивалентна исходной норме $\|\ \|$ пространства X и подпространство F в новой норме $|\ |$ 1-нормирующее, т. е. выражение, фигурирующее в определении характеристики, равно 1. Поэтому с самого начала будем считать подпространство F 1-нормирующим в исходной норме $\|\ \|$. Множество $K=A^*\{g \in Y^*: \|g\| \leqslant 1\}$ конечно слабо* компактно. В работе [7] (предложение 3) показано, что если X есть WCG-пространство, K — слабо* компактное подмножество такое, что линейная оболочка $\operatorname{lin} K$ является 1-нормирующим подпространством и

(✳✳) либо K, либо $K \setminus \{0\}$ линейно независимо,

то на X существует $\sigma(X, \operatorname{lin} K)$-полунепрерывная снизу локально равномерно выпуклая норма $\|\ \|_0$, эквивалентная исходной. Известно (и нетрудно проверить), что для такой нормы выполняется свойство (✳). Причем условие (✳✳) в доказательстве предложения 3 из [7] используется лишь для обеспечения существования базиса Маркушевича x_i, f_i, $i \in I$, в пространстве X с $f_i \in \operatorname{lin} K$. Но в случае, когда подпространство F является образом сопряженного оператора к линейной инъекции, существование такого M-базиса показать нетрудно. Устанавливается это точно так же, как и существование M-базиса в WCG-пространстве (см., напр., [8]), используя проекционное разложение единичного оператора [9]. Только надо учитывать доказанное в [9] утверждение, что проекционное разложение существует не только в исходной норме $\|\ \|$ пространства X, но и в более слабой $|||x|||=\|Ax\|_Y$.

Доказательство теоремы 1. 1)$\Rightarrow$2). Пусть $\|\ \|_0$ — норма на X, существование которой установлено в лемме 1. Определим отображение $R_\delta: AX \to X$, ставя точке $y \in AX$ в соответствие произвольно выбранную точку

$$R_\delta(y) \in \{x \in X: \|Ax-y\| \leqslant \delta\} \cap \{x \in X: \|x\|_0 \leqslant \inf_{\{z \in X: \|Az-y\| \leqslant \delta\}} \|z\|_0+\delta\}.$$

Если теперь $\lim\limits_{\delta\to 0}\|y_\delta - y\| = 0$, $\|y_\delta - y\| \leqslant \delta$, то $\lim\limits_{\delta\to 0}\|R_\delta y_\delta - A^{-1}y\|0 = 0$ по свойству (*), ибо

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\|R_\delta(y_\delta)\|_0 \leqslant \|A^{-1}y\|_0\,,$$

$$\|AR_\delta y_\delta - y\| \leqslant \|AR_\delta y_\delta - y_\delta\| + \|y_\delta - y\| \leqslant \delta + \delta$$

и $\lim\limits_{\delta\to 0}\|AR_\delta y_\delta - y\| = 0$. Итак, R_δ — регуляризатор для функции A^{-1} из AX в X. Следовательно [1] (с. 179), A^{-1} обладает регуляризатором и из Y в X. Таким образом, импликация 1)$\Rightarrow$2) доказана. Остальные импликации известны [1].

Простое объяснение, почему свойства линейного непрерывного инъективного оператора A (и его обратного) определяются свойствами подпространства $A^*Y^*\subset X^*$, имеется в [10]. Однако тот факт, что такие далекие по формальному определению и областям приложения свойства, как родственность и регуляризуемость, эквивалентны, кажется неожиданным.

4. Перейдем к изучению линейной конечномерной регуляризуемости. Банахово пространство E называется $\mathscr{L}_p$-пространством, $1\leqslant p\leqslant\infty$, если существует $\lambda > 0$ такое, что для любого конечномерного подпространства $X\subset E$ найдется конечномерное подпространство $Y\supset X$ и линейный биективный оператор $T: Y\to l_p^{(n)}$ с нормой $\max\{\|T\|, \|T^{-1}\|\} < \lambda$. В работе [11] доказано, что для оператора, определенного на сепарабельном $\mathscr{L}_\infty$-пространстве, регуляризуемость обратного эквивалентна его линейной конечномерной регуляризуемости. Так как при $1 < p < \infty$ $\mathscr{L}_p$-пространство рефлексивно и обладает свойством ограниченной аппроксимации [12], то тут тоже все ясно [13]. Покажем, что в $\mathscr{L}_1$-пространствах картина противоположная.

Теорема 3. *Пусть X — сепарабельное $\mathscr{L}_1$-пространство (в частности, $X = L_1[0, 1]$ или $X = l_1$). Для любого сепарабельного банахова пространства Y существует линейный непрерывный инъективный оператор $A: X\to Y$, обратный к которому регуляризуем, но не линейно конечномерно.*

Доказательство. Поскольку X есть $\mathscr{L}_1$-пространство, то оно имеет дополняемое подпространство, изоморфное $l_1: X = l_1\oplus V$ [12]. Как известно [13], обратный A^{-1} к оператору $A: X\to Y$ линейно конечномерно регуляризуем тогда и только тогда, когда подпространство $F = A^*Y^*\subset X^*$ квазибазисно, т. е. существует последовательность линейных непрерывных конечномерных операторов $P_n: X\to X$, поточечно сходящаяся к единичному, для которой $P_n^* X^*\subset F$. В сопряженном l_1^*, которое, с точностью до изоморфизма, мы отождествляем с аннулятором $V^\perp\subset X^*$, существует замкнутое по норме неквазибазисное, но нормирующее подпространство G [11]. Тогда сумма $F = G + l_1^\perp\subset X^*$ замкнута по норме и нормирует X. Покажем, что она неквазибазисна. Пусть $P_n: X\to X$ — последовательность операторов, требуемая в определении квазибазисности, а оператор P проектирует пространство X на l_1 параллельно V. Операторы $Q_n = PP_n|_{l_1}$, как легко видеть, сходятся к единичному оператору в пространстве l_1 и $Q_n^*: l_1^*\to G$. Но этого быть не может, т. к. подпространство G неквазибазисно. Доказательство теоремы завершит

Лемма 2. *X и Y — сепарабельные банаховы пространства и $F\subset X^*$ — нормирующее замкнутое по норме подпространство. Тогда существует непрерывный линейный инъективный оператор $A: X\to Y$, для которого подпространство A^*Y^* принадлежит F и нормирует X.*

Доказательство леммы лишь слегка модифицирует теорему 2 из [1] (с. 189). Выберем в пространстве X базис Маркушевича x_i, f_i, для которого $f_i\in F$ и $[f_i]_1^\infty\subset X^*$ — нормирующее подпространство [3] (с. 43—44). Пусть y_i, g_i — базис Маркушевича в пространстве Y. Можно, конечно, считать $\|x_i\| = \|y_i\| = 1$. Для всякого $x\in X$ положим

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i(x)\,y_i}{2^i\|f_i\|}\,.$$

Стандартно проверяется, что этот оператор линейный, вполне непрерывный и инъективный. Сопряженный оператор A^* переводит элементы g_i в $f_i/2^i\|f_i\|$ так, что $A^*Y^*\subset X^*$ — нормирующее подпространство. Кроме того, для всякого элемента $g\in Y^*$ и всякого i

$$|(A^*g)(x_i)|=|g(y_i)/(2^i\|f_i\|)|\leqslant\|g\|/(2^i\|f_i\|),$$

следовательно, ряд $A^*g=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g(y_i)}{2^i\|f_i\|}f_i$ абсолютно сходится и, поскольку подпространство F замкнуто, принадлежит F. Таким образом, $A^*Y^*\subset F$, и лемма доказана.

Рассмотрим в конце регуляризуемость аналитического продолжения. Пусть $A(G)$ — банахово пространство функций, аналитических в ограниченной односвязной области G комплексной плоскости с кусочно-гладкой границей ∂G и непрерывных вплоть до границы ∂G с нормой

$$\|x\|_{A(G)}=\max\{|x(z)|:z\in\partial G\},$$

Γ — компактное бесконечное множество, принадлежащее области G. Пусть $R:A(G)\to C(\Gamma)$ — оператор ограничения функций из $A(G)$ на Γ, $C(\Gamma)$ — пространство непрерывных функций на Γ. В [1] (с. 200) доказана регуляризуемость обратного оператора R^{-1}. Покажем, что на самом деле имеет место более точное утверждение.

Теорема 4. *Оператор R^{-1} аналитического продолжения функции с множества Γ на G линейно конечномерно регуляризуем.*

Доказательство. Точно такие же рассуждения, как и в [1] (с. 200), позволяют считать G единичным кругом, а 0 предельной точкой множества Γ.

Рассмотрим в $A(G)$ последовательность функций $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$. Как легко проверить, биортогональной к ней будет последовательность функционалов $\{\delta^{(n)}/n!\}_{n=0}^{\infty}$, где $(\delta^{(n)}/n!)(f)=f^{(n)}(0)/n!$ для произвольной функции $f\in A(G)$. Обозначим

$$S_n(f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k,\quad \sigma_n(f)=(S_0(f)+\ldots+S_{n-1}(f))/n.$$

Тогда по известной теореме [14] (с. 34) для каждой функции $f\in A(G)$ $\|\sigma_n(f)-f\|_{A(G)}\to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда следует, что последовательность функций $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ образует операторный базис в $A(G)$. Достаточно теперь доказать, что замыкание подпространства $Y=R^*(C^*(\Gamma))\subset A^*(G)$ содержит последовательность функционалов $\delta^{(n)}/n!$, сопряженную к последовательности z^n. Так как тогда Y квазибазисно и согласно [13] оператор R^{-1} линейно конечномерно регуляризуем.

Поскольку дельта-функция $\delta^{(0)}$ является также линейным непрерывным функционалом в пространстве $C(\Gamma)$, то $\delta^{(0)}\in Y$. Пусть $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность точек из Γ, сходящаяся к нулю. Тогда Y содержит также функционалы $\{\delta^{(0)}_{\gamma_n}\}_{n=1}^{\infty}$: $\delta^{(0)}_{\gamma_n}(f)=f(\gamma_n)$ для каждой функции $f\in A(G)$. Рассмотрим теперь последовательность функционалов $v_n=(\delta^{(0)}_{\gamma_n}-\delta^{(0)})/\gamma_n$ из Y. Для произвольной функции $f\in A(G)$, $\|f\|=1$, имеем

$$|\delta^{(1)}(f)-v_n(f)|=\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\gamma_n^{k-1}\right|\leqslant\sum_{k=2}^{\infty}|\gamma_n|^{k-1}=\frac{|\gamma_n|}{1-|\gamma_n|}, \tag{4}$$

т. к.

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=1}|f(\tau)|\,|d\tau|\leqslant 1.$$

Ввиду произвольности f отсюда следует сходимость последовательности v_n к $\delta^{(1)}$ по норме пространства $A^*(G)$, т. е. $\delta^{(1)}\in\overline{Y}$. Пусть принадлежность функционалов $\delta^{(0)}, \delta^{(1)}, \ldots, \delta^{(k)}$, $k\in N$, подпространству $\overline{Y}$ установлена. Тогда последовательность функционалов $u_n=\left(\delta^{(0)}_{\gamma_n}-\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{\delta^{(i)}}{i!}\gamma_n^i\right)\Big/\gamma_n^{k+1}$ принадлежит $\overline{Y}$.

Используя ту же оценку, что и в (4), легко проверить сходимость u_n к функционалу $\delta^{(k+1)}/(k+1)!$ по норме пространства $A^*(G)$. Таким образом, последовательность функционалов $\{\delta^{(n)}/n!\}_{n=0}^{\infty}$ принадлежит $\overline{R^*(C^*(\Gamma))}$. Теорема доказана.

Использованный метод доказательства позволяет установить линейную конечномерную регуляризуемость обратного оператора R^{-1} также для случая, когда $\Gamma\subset\partial G$.

Теорема 5. *Пусть Γ — собственное подмножество границы круга ∂D, $\mu(\Gamma)>0$. Обратный к оператору ограничения $R: A(D)\to C(\Gamma)$ линейно конечномерно регуляризуем.*

Доказательство. Покажем сначала, что подпространство $\overline{R^*(C^*(\Gamma))}$ содержит функционал $\delta^{(0)}$. Для этого рассмотрим последовательность функционалов $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $C^*(\Gamma)$. На каждой функции $g(z)\in C(\Gamma)$ действие w_n определяется так:

$$w_n(g)=\frac{e^{-n\varphi(0)}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\tau)\,e^{n\varphi(\tau)}}{\tau}\,d\tau,$$

где $\varphi(z)=u(z)+iv(z)$, причем

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\chi_{\Gamma}(e^{i\theta})\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta,\quad z=re^{i\varphi},\ 0\leqslant r<1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

$v(z)$ — гармоническая функция, сопряженная с функцией $u(z)$, $\chi_{\Gamma}(z)$ — характеристическая функция множества Γ. Отметим, что гармоническая функция $u(z)$ почти всюду на Γ и на дополнении $\partial D\setminus\Gamma$ имеет угловые граничные значения, соответственно равные 1 и 0. Во внутренних точках D она положительна и меньше единицы (см. [15], с. 106). Покажем, что $R^*w_n\to\delta^{(0)}$ в норме $A^*(D)$. Действительно, для каждой функции $f\in A(D)$, $\|f\|=1$, имеем

$$2\pi|e^{n\varphi(0)}||\delta^{(0)}(f)-R^*w_n(f)|=2\pi|e^{n\varphi(0)}||f(0)-w_n(Rf)|=$$

$$=\left|\int\limits_{|\tau|=1}\frac{f(\tau)\,e^{n\varphi(\tau)}}{\tau}\,d\tau-\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)\,e^{n\varphi(\tau)}}{\tau}\,d\tau\right|=\left|\int\limits_{\partial D\setminus\Gamma}\frac{f(\tau)\,e^{n\varphi(\tau)}}{\tau}\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\partial D\setminus\Gamma}|f(\tau)|\,|d\tau|\leqslant 2\pi-\mu(\Gamma).$$

Отсюда следует, что $\|R^*w_n-\delta^{(0)}\|_{A^*(D)}\to 0$ при $n\to\infty$. Тем самым доказано, что $\delta^{(0)}\in\overline{R^*(C^*(\Gamma))}$. Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная, сходящаяся к нулю, последовательность точек из единичного круга. Легко показать, используя аналогичные рассуждения, что функционалы $\delta^{(0)}_{z_n}$ также принадлежат $\overline{R^*(C^*(\Gamma))}$. Теперь квазибазисность подпространства $R^*(C^*(\Gamma))$ можно установить таким же способом, как и в теореме 4. Таким образом, оператор R^{-1} линейно конечномерно регуляризуем.

Доказательство теоремы 5 при некоторых дополнительных условиях на множество Γ и с использованием другой техники имеется в [11].

Отметим, что теорема верна для односвязных областей G, границами которых являются спрямляемые жордановые кривые, поскольку тогда существует конформное отображение $f: G \to D$, которое можно продолжить на границу ∂G до гомеоморфизма замкнутых областей $\bar{G}$ и $\bar{D}$, причем если $\Gamma \subset \partial G$, $\mu(\Gamma) > 0$, то $\mu(f(\Gamma)) > 0$ [15] (с. 179), и отображение порождает изометрии $A(G)$ на $A(D)$ и $C(\Gamma)$ на $C(f(\Gamma))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения. Киев, 1980. 216 с.
2. Петунин Ю. И. Сопряженные банаховы пространства, содержащие подпространства характеристики нуль.— ДАН СССР, 1964, т. 154, № 3, с. 527—529.
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, I.— Ergeb. Math., 1977, 92, XIII. 190 p.
4. Rosenthal H. P. On quasi-complemented subspaces of Banach spaces with an appendix on compactness of operators from $L^p(\mu)$ to $L^r(\nu)$.— J. Funct. Anal., 1969, v. 4, № 2, p. 176—214.
5. Davis W. J., Johnson W. B. Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces.— Isr. J. Math., 1973, v. 14, № 4, p. 353—367.
6. Кадец М. И. О слабой и сильной сходимости.— ДАН СССР, 1958, т. 122, № 1, с. 13—16.
7. John K., Zizler V. Some notes on Markuševič bases in weakly compactly generated Banach spaces.— Compositio Math., 1977, v. 35, № 2, p. 113—123.
8. Reif J. A note on Markuševič bases in weakly compactly generated Banach spaces.— Comment. math. Univ. carolinae, 1974, v. 15, № 2, p. 335—340.
9. Amir D., Lindenstrauss J. The structure of weakly compact sets in Banach spaces.— Ann. Math., 1968, v. 88, № 1, p. 35—46.
10. Пличко А. Н. Слабые* секвенциальные замыкания и B-измеримость отображений, обратных к линейным непрерывным операторам в WCG-пространствах.— ВИНИТИ, № 4931—80 Деп., 1980.
11. Вахер Ф. С., Пличко А. Н. Свойство ограниченной аппроксимации и линейная конечномерная регуляризуемость.— Укр. матем. журн., 1981, т. 33, № 2, с. 167—171.
12. Lindenstrauss J., Rosenthal H. P. The $\mathcal{L}_p$-spaces.—Isr. J. Math., 1969, v. 7, № 4, p. 325—349.
13. Винокуров В. А., Пличко А. Н. О регуляризуемости линейных обратных задач линейными методами.—ДАН СССР, 1976, т. 229, № 5, с. 1037—1040.
14. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. М., 1963. 311 с.
15. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. 2-е изд. М.— Л., 1950. 336 с.

г. Москва
г. Львов

Поступила
16.01.1984

Б. А. Державец

517.554

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ C^n, ИМЕЮЩИХ ЗАДАННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Пусть D — линейно выпуклая, ограниченная область в C^n, с границей класса C^2, содержащая начало координат. Сопряженное множество к области D будем обозначать $\tilde{D} = \{\xi \in C^n : \langle \xi, z \rangle \neq 1 \quad \forall z \in D\}$. Будем говорить, что область D обладает свойством R, если существует шар с центром в 0 такой, что D звездна относительно любой точки этого шара.

Цель данной статьи—описание сопряженного к пространству функций, аналитических в ограниченной, линейно выпуклой области $D \subset C^n$, с границей класса C^2, обладающей свойством R, и имеющих заданный рост вблизи ∂D, как пространства функций, аналитических во внутренности $\tilde{D}$ и имеющих соответствующую граничную гладкость на $\partial\tilde{D}$. Доказательство опирается на