Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2015. — Т.12

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2015. — V.12

КРИТЕРІЙ ПРОПОРЦІЙНОСТІ НОРМ

Анатолій Плічко

Краківська політехніка ім. Тадеуша Косцюшка, вул. Варшавська 24, Краків 31-155, Польща

А. Плічко. *Критерій пропорційності норм* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2015. — Т.12. — С. 1–4.

У замітці узагальнюється критерій Шехтмана-Скшипека евклідовості скінченновимірного нормованого простору. А саме, доводиться наступне твердження. Нехай $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|$ – дві норми на довільному дійсному лінійному просторі X. Припустимо, що для довільних 2-вимірного підпростору $E \subset X$, 1-вимірного підпростору $V \subset E$ і проектора $P : E \to V$ з рівності $\|P\|_0 = 1$ випливає $\|P\| = 1$. Тоді норми $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|$ пропорційні.

A. Plichko, *A criterium for norms proportionality*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **12** (2015), 1–4.

We give a generalization of Shekhtman-Skrzypek characterization of Euclidean spaces in the class of finite-dimensional normed spaces. Exactly, we prove the following statement. Let $\|\cdot\|_0$ and $\|\cdot\|$ be two norms on an arbitrary real linear space X. Let for any 2-dimensional space $E \subset X$, a 1-dimensional subspace $V \subset E$ and a projection $P : E \to V$ the equality $\|P\|_0 = 1$ implies $\|P\| = 1$. Then the norms $\|\cdot\|_0$ and $\|\cdot\|$ are proportional.

Розглянемо нормований простір X над полем дійсних чисел і його замкнений підпростір V. Позначимо через $\mathcal{P}(X, V)$ сукупність усіх обмежених лінійних проекторів з X на V. Проектор $P : X \to V$ називається *мінімальним*, якщо

$$\|P\| = \inf\{\|Q\| : Q \in \mathcal{P}(X, V)\}.$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46C15, 46B04 *УДК:* 519.21
Ключові слова та фрази: Proportional norms, projection
E-mail: aplichko@pk.edu.pl

Внаслідок теореми Гана-Банаха, для одновимірного підпростру V мінімальний проектор існує і його норма дорівнює 1. Якщо H – гільбертів простір, то для будь-якого замкненого підпростору $V \subset H$ ортогональний (відносно скалярного добутку) проектор $H \to V$ буде єдиним мінімальним проектором на V (одиничної норми). У праці [5] для скінченновимірних просторів доведене певною мірою обернене твердження:

Теорема 1. *Якщо для будь-якого одновимірного підпростору $V \subset X = (\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ ортогональний (відносно стандартного скалярного добутку) проектор є мінімальним, то X буде ізометричним до евклідового простору.*

Ми узагальнимо цю теорему на нескінченновимірні простори; з певними уточненнями. Наше доведення буде значно простішим від доведення теореми 1, наведеного в [5]. Зауважимо, що умовам гільбертовості банахових просторів присвячена численна література; див. напр. оглядові праці [1], [4].

У наступній лемі розглядаємо неперервні вгнуті функції $r(\theta)$ і $r_0(\theta)$ на відрізку $[0, \frac{\pi}{2}]$, задані в полярних координатах, причому $r(0) = r_0(0) = r_0(\frac{\pi}{2}) = 1$ і $r(\frac{\pi}{2}) < 1$. Оскільки неперервна вгнута функція майже скрізь диференційовна (див. напр. теорему Лебега в [2, 2.3.3]), то існує підмножина $D \subset [0, \frac{\pi}{2}]$ міри $\frac{\pi}{2}$, в точках якої обидві похідні $r'(\theta)$, $r_0'(\theta)$ існують.

Лема 1. *Існує точка $t \in D$, в якій $r'(t) < r_0'(t)$.*

Доведення. Неперервна вгнута функція буде абсолютно неперервною. Тому, за теоремою Лебега (для інтеграла Лебега) [3, с. 297],

$$r_0(\pi/2) - r(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} [r_0(\theta) - r(\theta)]' d\theta.$$

Така рівність неможлива, якщо $r'(t) \geq r_0'(t)$ для кожного $t \in D$. $\square$

Зауваження 1. Геометрично, лема 1 означає, що для деякого $t \in D$ дотичні до графіків функцій $r(\theta)$ та $r_0(\theta)$ в точках $(\theta, r(\theta))$ та $(\theta, r_0(\theta))$ не паралельні.

У наступних зауваженні та наслідку розглядаємо простір $\mathbb{R}^2$ з базисними векторами $e_1 = (1, 0)$, і $e_2 = (0, 1)$. На ньому розглядаємо дві норми $\| \cdot \|$, $\| \cdot \|_0$ і позначаємо $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_0 = 1\}$.

Зауваження 2. Візьмімо довільну точку $v \in S$, пряму l, що проходить через v і проектор P на підпростір $\operatorname{lin} v$ вздовж l. З геометричних міркувань видно, що коли в точці v існує (якась) дотична до кола S, то $\|P\| = 1$ тоді й тільки тоді, коли ця дотична збігіється з l. Це ж саме зауваження справедливе і для кола S_0.

Зауваження 3. Нехай $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_0 \leq \|x\|$, $\|e_1\|_0 = \|e_1\| = \|e_2\|_0 = 1$, а $\|e_2\| > 1$. Тоді знайдеться така точка $v_0 \in S_0$, в якій існує дотична l_0 до S_0 і для проектора P на підпростір $\operatorname{lin} v_0$ паралельно до l_0

$$\|P\|_0 = 1, \text{ а } \|P\| > 1.$$

Доведення. Позначимо через $r(\theta)$ та $r_0(\theta)$ функції на відрізку $[0, \frac{\pi}{2}]$, задані в полярних координатах, графіками яких є частини кіл S та S_0 відповідно, що лежать у першій четверті. Формально

$$r(\theta) = r, \text{ якщо } \|(\theta, r)\| = 1$$

(намалюйте рисунок); і подібно для r_0. З неперервності та опуклості норм випливає неперервність та вгнутість обох функцій $r(\theta)$ та $r_0(\theta)$, а з умов наслідку – виконання умов леми 1. Отже, за цією лемою, знайдеться точка $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, в якій обидві похідні r', r_0' існують і $r'(t) \neq r_0'(t)$. Візьмімо точку v_0 з полярними координатами $(t, r_0(t))$. За побудовою, $v_0 \in S_0$ і в ній дотична l_0 до сфери S_0 існує. Згідно з зауваженням 2, $\|P\|_0 = 1$.

З іншого боку, точка v з полярними координатами $(t, r(t))$ належить до S. Тому дотична l до кола S у точці v не паралельна до l_0. Тоді, згідно з зауваженням 2, $\|P\| > 1$. □

Норми $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|$ на лінійному просторі X назвемо *пропорційними*, якщо знайдеться таке число $\lambda > 0$, що $\|x\|_0 = \lambda \|x\|$ для кожного елемента $x \in X$.

Твердження 1. *Нехай $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|$ – дві норми на довільному дійсному лінійному просторі X. Нехай для довільних 2-вимірного підпростору $E \subset X$, 1-вимірного підпростору $V \subset E$ і проектора $P : E \to V$*

$$\|P\|_0 = 1 \Rightarrow \|P\| = 1.$$

Тоді норми $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|$ пропорційні.

Доведення. Норми пропорційні тоді й тільки тоді, коли їхні звуження на будь-який 2-вимірний підпростір пропорційні. Отже можна зосередитися на 2-вимірному просторі E. Множачи норми на відповідні додатні числа, можна вважати, що $\|\cdot\|_0 \le \|\cdot\|$ і існує елемент $x \in E$ такий, що $\|x\|_0 = \|x\|$.

Якщо тепер норми різні, то знайдеться такий елемент $y \in E$, що $1 = \|y\|_0 < \|y\|$. Використовуючи лінійне відображення $E \to \mathbb{R}^2$ яке переводить x у e_1, а y в e_2, можемо вважати, що знаходимося в умовах наслідку 3. За цим наслідком, існує такий елемент $v_0 \in S_0$, що дотична до S_0 у точці v_0 не буде паралельною дотичній до S у точці $v = \frac{v_0}{\|v_0\|}$. Нехай $V = \operatorname{lin} v_0 = \operatorname{lin} v$ і P – проектор E на підпростір V вздовж дотичної до S_0 у точці v_0. За наслідком 3, $\|P\|_0 = 1$, але $\|P\| > 1$. □

Наслідок 1. *Нехай $\langle \cdot, \cdot \rangle$ і $\|\cdot\|$ – скалярний добуток і норма на довільному дійсному лінійному просторі X. Якщо для довільних двовимірного підпростору $E \subset X$, 1-вимірного підпростору $V \subset E$ і ортогонального (відносно скалярного добутку) проектора $P : E \to V$ норма $\|P\| = 1$, то $\|\cdot\|$ буде пропорційною до норми $\|\cdot\|_0 = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.*

Покажемо, як з попереднього наслідку дістати теорему 1. Нехай $V \subset X$ – одновимірний підпростір. За теоремою Гана-Банаха, мінімальна $\|\ \|$-норма проектора на нього дорівнює одиниці. Тому, якщо виконується умова теореми 1, то виконується й умова наслідку 1. Це й доводить теорему 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. D. Amir, *Characterizations of inner product spaces*, Birkhäuser-Verlag, Basel (1986), 200 p.
2. В.М. Кадець, *Курс функціонального аналізу та теорії міри*, Університетська бібліотека, Львів (2012), 590 с.
3. А.М. Колмогоров, С.В. Фомін, *Елементи теорії фунцій і функціонального аналізу*, "Вища Школа", Київ (1974), 455 с.
4. B. Randrianantoanina, *Norm one projections in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **5** (2001), 35–95.
5. B. Shekhtman, L. Skrzypek, *On a characterization of Hilbert spaces through minimality of orthogonal projections and related topics*, J. Concrete and Applicable Mathematcs **13**(2015), 322–329.

Надійшло 10.11.2015

Після переробки 11.11.2015