

# ЗАУВАЖЕННЯ ДО ТЕОРЕМИ ГЛІВЕНКА-КАНТЕЛЛІ У СЕПАРАБЕЛЬНОМУ МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРИ

©2010 р. Іван МАЦАК<sup>1</sup>, Анатолій ПЛІЧКО<sup>2</sup>

*Присвячується Володимирові Маслюченку з нагоди його 60-річчя*

<sup>1</sup>Київський національний університет ім. Тараса Шевченка  
пр. Глушкова 2, корп. 6, Київ 03127  
*email : mik@unicyb.kiev.ua*

<sup>2</sup>Краківська політехніка ім. Тадеуша Косцюшка  
вул. Варшавська 24, Краків 31-155, Польща  
*email : aplichko@pk.edu.pl*

Редакція отримала статтю 41 жовтня 2010 р.

У замітці дається доведення теореми Глівенка-Кантеллі для сепарабельних метричних просторів. Доводиться також наступне твердження. Нехай  $X$  – випадковий елемент зі значеннями в сепарабельному метричному просторі  $T$ ,  $\mathcal{U}$  – довільний клас борелівських множин з  $T$ ,  $\delta > 0$ , а  $\partial_\delta(U)$  означає  $\delta$ -окіл межі  $\partial U$  множини  $U$ . Тоді існує система борелівських множин  $\mathcal{U}'$  з умовою:  $\forall U \in \mathcal{U} \exists U' \in \mathcal{U}'$ ,  $U \subset U' : U' \setminus U \subset \partial_\delta(U)$ , для якої виконується теорема Глівенка-Кантеллі.

**Вступ і основні результати.** Для незалежних однаково розподілених випадкових величин (в.в.)  $\xi_1, \xi_2, \dots$  в  $\mathbb{R}$  з функцією розподілу  $F(t)$ , *емпірична функція розподілу* визначається формулою

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, t)}(\xi_i), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Відома теорема Глівенка-Кантеллі [6], [3] стверджує, що майже напевне (м.н.)

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n^*(t) - F(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Природно постає питання про її узагальнення на ширші класи просторів. У теоремі Глівенка-Кантеллі фактично маємо справу з супремумом по півпрямим. Найприроднішою при узагальненні на простір  $\mathbb{R}^n$  є заміна їх на півпростори або на їхні скінченні перетини. Для півпросторів це зробили Форте та Мур'є [4, с. 281], з додатковою умовою абсолютної неперервності розкладу даного випадкового вектора щодо міри Лебега  $\lambda$ . Ця умова була знята в працях Вольфовіца [17, с. 131], [18]. Ахмад [1] і Ранга Рао [8, сс. 665, 675] незалежно отримали узагальнення на вимірні опуклі множини, за умови неперервності класу опуклих множин щодо розподілу даного випадкового вектора (означення див нижче). Прості приклади [5, с. 197] показують, що для довільних розподілів цю умову зняти не можна. Існує значна кількість праць, присвячених теоремі Глівенка-Кантеллі в  $\mathbb{R}^n$ . Докладну бібліографію див. у огляді [5]. Про пізніші результати щодо теореми Глівенка-Кантеллі у просторі  $\mathbb{R}^n$  див. [12], [13].

Розглянемо деякі узагальнення теореми Глівенка-Кантеллі на сепарабельний метричний простір. Піонерськими тут були праці Варадараяна [16], Ранги Рао [9] та Сазонова [10]. Систематичне дослідження справедливості теореми Глівенка-Кантеллі в метричних просторах, у контексті слабкої рівномірної збіжності мір, було проведене Топсо та його співавторами [2], [14], а також деякими іншими математиками (див. огляд [7]). Уведемо необхідні позначення й означення.

Нехай  $(T, \Sigma)$  – вимірний простір, а  $(X_i)_{i=1}^{\infty}$  – послідовність незалежних копій в.е.  $X$ , заданого на ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$  зі значеннями в  $T$ . Позначимо через

$\mathcal{U}$  довільний підклас  $\sigma$ -алгебри  $\Sigma$ ,

$\mathbb{P}(U) = \mathbb{Q}\{X \in U\}$ ,  $U \in \mathcal{U}$  – теоретичний розподіл в.е.  $X$  (деякі результати природніше формулювати в термінах розподілу, тобто ймовірнісної міри на метричному просторі, не згадуючи про випадкові елементи),

$\mathbb{P}_n^*(U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \in U)$  – емпіричний розподіл, де

$I(X_i \in U) = 1$  при  $X_i \in U$  і  $= 0$ , при  $X_i \notin U$ .

Для метричного простору  $T$  з метрикою  $\text{dist}$ , за  $\Sigma$  братимемо сукупність борелівських множин. Позначатимемо також через  $\partial_{\delta}(U)$   $\delta$ -окіл межі  $\partial U$  множини  $U$ .

*Ми розглядаємо тільки сепарабельні метричні простори, спеціально про це не згадуючи. Усі міри вважаємо ймовірнісними.*

Кажуть, що  $\mathcal{U}$  є *GC-класом для розподілу*  $\mathbb{P}$  [5, с. 196], або що для в.е.  $X$  і для класу  $\mathcal{U}$  виконується *теорема Глівенка-Кантеллі*, коли м.н.

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} |\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}(U)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Супремум у цій формулі не завжди вимірний, а вимірність не завжди потрібна (пор. із зауваженням у [15, с. 240]). Для зліченного класу  $\mathcal{U}$ , звичайно, проблеми нема. У багатьох випадках вимірність доведена. Часто її просто постулюють.

Першим природним кроком для перевірки виконання теореми Глівенка-Кантеллі є розбиття в.е., чи радше відповідного розподілу, на дискретну (атомну) і неперервну (безатомну) частини і доведення теореми для кожної частини окремо. Це стверджує,

наприклад, [15, лема 2 та заув. на с. 242]. Кожна система множин буде  $GC$ -класом для дискретного розподілу (безпосередній наслідок леми Шеффе [11]; див. також доведення теореми 7.1 з [9]; ми отримаємо цей факт як наслідок леми 1). Тому має сенс розглядати тільки безатомні розподіли, що надалі й робитимемо.

Нагадаємо [9, с. 660], що множина  $U$  метричного простору  $T$  називається  $\mathbb{P}$ -неперервною, якщо  $\mathbb{P}(\partial U) = 0$ .

Часом (див. напр. [14, с. 279]) вживається зворотний термін; говориться про  $U$ -неперервність міри  $\mathbb{P}$ . Кожна опукла борелівська множина з  $\mathbb{R}^m$  буде  $\mathbb{P}$ -неперервною для кожної міри  $\mathbb{P}$ , абсолютно неперервної відносно міри Лебега [5, с. 198]. Часто  $\mathbb{P}$ -неперервність також і необхідна для виконання теореми Глівенка-Кантеллі. Так простий приклад (див. [9, с. 679], [5, с. 197],) показує, що без умови  $\mathbb{P}$ -неперервності теорема Глівенка-Кантеллі може не виконуватися навіть для кругів з  $\mathbb{R}^2$ . Більше того, рівність  $\mathbb{P}$ -міри крайніх точок класу замкнених опуклих множин необхідна для виконання теореми Глівенка-Кантеллі для цього класу [5, с. 198]. Очевидні винятки отримуємо для опуклих  $\partial U$ . Так, наприклад, як тільки міра  $\mathbb{P}$  в  $\mathbb{R}^2$  зосереджена на одновимірному підпросторі  $L$ , то сукупність півпросторів буде  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ , але міра межі кожного півпростору, яка містить  $L$ , дорівнює одиниці.

Клас  $\mathcal{U}$  підмножин метричного простору  $T$  називатимемо  $\mathbb{P}$ -одностаїно неперервним, якщо для кожного  $\epsilon > 0$  існує  $\delta > 0$  з

$$\rho(\delta) := \sup_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}(\partial_\delta(U)) < \epsilon.$$

Інакше кажучи,  $\mathbb{P}$ -одностаїна неперервність означає неперервність функції  $\rho(\delta) = \rho_{\mathcal{U}, \mathbb{P}}(\delta)$  в нулі. Ця властивість без назви неодноразово вживалася в літературі (див. напр. [10], [2, с. 2], [14, с. 282], [15, с. 242]) і еквівалентна так званій  $\mathbb{P}$ -рівномірності, яку ми не розглядатимемо. Звичайно, кожна множина  $\mathbb{P}$ -одностаїно неперервного класу буде  $\mathbb{P}$ -неперервною. Наступне твердження показує важливість цього поняття.

**Теорема 1.** *Нехай  $X$  – випадковий елемент зі значеннями в метричному просторі  $T$  і клас множин  $\mathcal{U}$  є  $\mathbb{P}$ -одностаїно неперервним. Тоді  $\mathcal{U}$  буде  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ .*

Самої  $\mathbb{P}$ -неперервності мало для виконання теореми 1, навіть для опуклих множин. Так, у праці [10] показано, що сукупність  $\mathcal{H}$  усіх півпросторів нескінченновимірного банахового простору не буде  $GC$ -класом для довільної міри  $\mathbb{P}$ , відносно якої усі півпростори неперервні. Легко помітити, що кожен півпростір банахового простору буде  $\mathbb{P}$ -неперервним, наприклад, для невиврожденної (тобто не зосередженої на жодній гіперплощині) гаусівської міри  $\mathbb{P}$ .

*Зауваження 1.* Невиврожденість міри ще не гарантує  $\mathbb{P}$ -неперервності. Нехай, наприклад,  $S_n$  – послідовність кіл на площині радіусу  $n$  з центром у нулі. Розглянемо міру  $\mathbb{P}(S_n) = 1/2^n$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2 \setminus \cup S_n) = 0$  і рівномірну на кожному  $S_n$ . Ця міра невивроджена, але відповідні круги не будуть  $\mathbb{P}$ -неперервними.

Для класу  $\mathcal{H}$  півпросторів банахового простору теорема 1 доведена в [10]. У загальному випадку вона впливає з еквівалентності  $\mathbb{P}$ -одностайної неперервності та  $\mathbb{P}$ -рівномірності (див. [2, Теор. 2]) і результату Варадараяна про слабку збіжність емпіричних розподілів до теоретичного [16]. Це, зокрема, зазначено у [14, с. 287].<sup>1</sup> Як добре відомо, теореми Глівенка-Кантеллі є специфікацією закону великих чисел (ЗВЧ) у (несепарабельному) банаховому просторі. Цікаво, що ЗВЧ у (сепарабельному) банаховому просторі виводиться з результатів про рівномірну слабку збіжність мір [9, Теорема 6.2].

Звичайно ж з того, що  $\mathcal{U}$  є  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$  не впливає його  $\mathbb{P}$ -одностайна неперервність, бо, як вже зазначалося, не впливає навіть  $\mathbb{P}$ -неперервність. Наголосимо, що умова  $\mathbb{P}$ -одностайної неперервності далека від необхідності. Носієм  $\text{supp } \mathbb{P}$  імовірності  $\mathbb{P}$  називаємо таку найменшу замкнену підмножину  $S \subset T$ , що  $\mathbb{P}(S) = 1$ . Заміна в теоремі 1 простору  $T$  на носій  $\text{supp } \mathbb{P}$  безплатно дає загальніший результат.

У цій замітці наводиться ще одне доведення теореми 1 з використанням наближення  $X$  дискретними в.е. На нашу думку це доведення має певний методичний інтерес. Далі доводиться наступний результат, який видається нам новим.

**Теорема 2.** *Нехай  $X$  – випадковий елемент зі значеннями в метричному просторі  $T$ ,  $\mathcal{U}$  – довільний клас борелівських множин з  $T$  і  $\delta > 0$ . Тоді існує система борелівських множин  $\mathcal{U}'$ , яка є  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ , з умовою*

$$\forall U \in \mathcal{U} \quad \exists U' \in \mathcal{U}', \quad U \subset U' : U' \setminus U \subset \partial_\delta(U).$$

**Доведення основних результатів.** Підставою доведень буде наступна лема.

**Лема 1.** *Нехай у вимірному просторі  $(T, \Sigma)$  заданий випадковий елемент  $X$  і клас множин  $V_i \in \Sigma$ ,  $i \in \mathcal{I}$ . Розглянемо клас  $\mathcal{U}$  усіх “вимірних” об’єднань множин з  $(V_i)$ :*

$$\mathcal{U} = \left\{ \bigcup_{i \in I} V_i \in \Sigma : I \subset \mathcal{I} \right\}. \quad (1)$$

*Якщо для кожного  $\epsilon > 0$  існує така скінченна множина  $K \subset \mathcal{I}$ , що  $\mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathcal{I} \setminus K} V_i) < \epsilon$ , то  $\mathcal{U}$  буде  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ .*

*Доведення.* Зафіксуємо довільне  $\epsilon > 0$ . За умовою леми існує така скінченна множина  $K$ , що  $\mathbb{P}(\mathbb{V}) < \epsilon$ , де  $\mathbb{V} = \bigcup_{i \in \mathcal{I} \setminus K} V_i$ . Покладемо  $\bar{\mathbb{V}} = \bigcup_{i \in K} V_i$ . Оскільки  $\mathbb{P}_n^*(U)$  – випадкова міра, то для кожної множини  $U \in \mathcal{U}$  напевне

$$|\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}(U)| \leq \Delta_1(U) + \Delta_2(U), \quad (2)$$

де

$$\Delta_1(U) = |\mathbb{P}_n^*(U \cap \mathbb{V}) - \mathbb{P}(U \cap \mathbb{V})|, \quad \Delta_2(U) = |\mathbb{P}_n^*(U \cap \bar{\mathbb{V}}) - \mathbb{P}(U \cap \bar{\mathbb{V}})|.$$

<sup>1</sup>Автори вдячні рецензентів першого варіанту цієї замітки за вказівку на роботу [2] та деякі пояснення стосовно теореми Глівенка-Кантеллі.

Оскільки  $\mathbb{P}(\mathbb{V}) < \epsilon$ , то на підставі ЗВЧ Колмогорова м.н.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{U \in \mathcal{U}} \Delta_1(U) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n^*(\mathbb{V}) + \mathbb{P}(\mathbb{V}) \leq 2\mathbb{P}(\mathbb{V}) < 2\epsilon. \quad (3)$$

Покладемо  $\mathcal{U}' = \{U' = \bigcup_{i \in I \cap K} V_i, I \subset \mathcal{I}\}$ . Тоді для кожного  $U \in \mathcal{U}$  існує  $U' \in \mathcal{U}'$ , для якої

$$U \cap \bar{\mathbb{V}} = U' \cap \bar{\mathbb{V}}.$$

Справді, для множини  $U = \bigcup_{i \in I} V_i \subset \mathcal{U}$  досить взяти  $U' = \bigcup_{i \in I \cap K} V_i \subset \mathcal{U}'$ . Це означає, що при  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{U}} \Delta_2(U) &= \sup_{\mathcal{U}'} \Delta_2(U') \\ &\leq \sup_{\mathcal{U}'} |\mathbb{P}_n^*(U' \cap \bar{\mathbb{V}}) - \mathbb{P}(U' \cap \bar{\mathbb{V}})| \\ &\leq \sum_{\mathcal{U}'} |\mathbb{P}_n^*(U' \cap \bar{\mathbb{V}}) - \mathbb{P}(U' \cap \bar{\mathbb{V}})| \rightarrow 0 \quad \text{м.н.} \end{aligned} \quad (4)$$

Останнє співвідношення випливає із ЗВЧ Колмогорова, бо множина  $\mathcal{U}'$  скінчена. Збираючи разом (2), (3) та (4) отримуємо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathcal{U}} |\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}(U)| < 2\epsilon.$$

Але число  $\epsilon$  довільне, тому  $\mathcal{U}$  буде  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ .  $\square$

Наступний простий наслідок добре відомий.

**Наслідок 1.** *Нехай  $X$  дискретний випадковий елемент зі значеннями у вимірному просторі  $(T, \Sigma)$ . Тоді  $\Sigma$  буде  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ .*

*Доведення.* Якщо  $X$  набуває зліченної кількості значень  $x_i$ , то візьмемо  $V_i = \{x_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . За Лемою 1,  $\mathcal{U}$  буде  $GC$ -класом. Оскільки для кожного  $A \in \Sigma$  існує таке  $U \in \mathcal{U}$ , що  $\mathbb{P}(A \Delta U) = 0$ , то  $\Sigma$  також буде  $GC$ -класом.  $\square$

**Наслідок 2.** *Нехай  $X$  – випадковий елемент зі значеннями у вимірному просторі  $(T, \Sigma)$ ,  $(V_i)$  – послідовність неперетинних множин з  $\Sigma$ , а  $\mathcal{U}$  – клас множин, визначений рівністю (1). Тоді  $\mathcal{U}$  буде  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ .*

Наслідок 2 отримуємо безпосередньо з леми 1, бо для неперетинної послідовності множин  $(V_i)$  виконується умова цієї леми.

*Доведення теореми 1.* Зафіксуємо довільне  $\epsilon > 0$  та у відповідності з  $\mathbb{P}$ -одностайною неперервністю підберемо  $\delta > 0$  так, щоб  $\rho(2\delta) < \epsilon$ . У (сепарабельному!) метричному просторі  $T$  існує послідовність неперетинних борелівських множин  $V_n$ , кожна діаметру  $< \delta$ , об'єднання яких становить увесь простір. Зафіксуємо у кожній множині  $V_n$  по точці  $x_n$ . Нарешті, введемо допоміжні в.е.  $X^\delta = x_n$ , якщо  $X \in V_n$  і  $X_i^\delta = x_n$ , якщо  $X_i \in V_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , та розподіли  $\mathbb{P}_\delta(U) = \mathbb{Q}\{X^\delta \in U\}$  і  $\mathbb{P}_{\delta n}^*(U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i^\delta \in U)$ .

Нехай  $U \in \mathcal{U}$ . Очевидно, напевне

$$|\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}(U)| \leq \Delta_1(U) + \Delta_2(U) + \Delta_3(U), \quad (5)$$

де

$$\Delta_1(U) = |\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}_{\delta n}^*(U)|, \quad \Delta_2(U) = |\mathbb{P}_{\delta n}^*(U) - \mathbb{P}_\delta(U)|, \quad \Delta_3(U) = |\mathbb{P}_\delta(U) - \mathbb{P}(U)|.$$

Оцінимо згори доданки правої частини нерівності (5).

Почнімо з  $\Delta_1(U)$ . Оскільки напевне

$$\text{dist}(X, X^\delta) < \delta, \tag{6}$$

то звідси отримуємо

$$|I(X \in U) - I(X^\delta \in U)| \leq I(X^\delta \in \partial_\delta(U)). \tag{7}$$

Справді, ліва частина нерівності (7) завжди не перевищує 1. Тому, якщо станеться подія  $\{X^\delta \in \partial_\delta(U)\}$ , то в правій частині (7) буде 1 і нерівність виконана.

Навпаки, нехай сталася протилежна подія. Тоді можливі випадки:

- i)*  $X^\delta \in \{x \in U : \text{dist}(x, T \setminus U) \geq \delta\}$ , або
- ii)*  $X^\delta \in \{x \in T : \text{dist}(x, U) \geq \delta\}$ .

Для випадку *i)* з нерівності (6) випливає, що сталися події  $\{X \in U\}$  та  $\{X^\delta \in U\}$ , а отже, ліворуч у нерівності (7) буде  $1 - 1 = 0$ .

У випадку *ii)* аналогічно маємо: сталися події  $\{X \in T \setminus U\}$  та  $\{X^\delta \in T \setminus U\}$ , тобто ліворуч у (7) буде  $0 - 0 = 0$ . Таким чином, в обох випадках нерівність (7) виконується.

З неї одержуємо

$$\Delta_1(U) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i^\delta \in \partial_\delta(U)) = \mathbb{P}_{\delta n}^*(\partial_\delta(U)).$$

Але в.е.  $X^\delta$  дискретний, тому у відповідності з наслідком 1 можна записати

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathcal{U}} \Delta_1(U) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathcal{U}} \mathbb{P}_{\delta n}^*(\partial_\delta(U)) \\ &= \sup_{\mathcal{U}} \mathbb{P}_\delta(\partial_\delta(U)) \leq \sup_{\mathcal{U}} \mathbb{P}(\partial_{2\delta}(U)) = \rho(2\delta) < \epsilon \quad \text{м.н.} \end{aligned} \tag{8}$$

Оцінка  $\Delta_2(U)$ . Оскільки в.е.  $X^\delta$  дискретний, то за наслідком 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathcal{U}} \Delta_2(U) = 0 \quad \text{м.н.} \tag{9}$$

Оцінка  $\Delta_3(U)$ . Враховуючи нерівність (7), маємо

$$\begin{aligned} \Delta_3(U) &= |\mathbb{E}I(X^\delta \in U) - \mathbb{E}I(X \in U)| \\ &\leq \mathbb{E}|I(X^\delta \in U) - I(X \in U)| \\ &\leq \mathbb{E}I(X^\delta \in \partial_\delta(U)) \leq \mathbb{E}I(X \in \partial_{2\delta}(U)) \\ &= \mathbb{Q}\{X \in \partial_{2\delta}(U)\} \leq \rho(2\delta) < \epsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Збираючи разом співвідношення (5), (8)–(10) отримаємо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathcal{U}} |\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}(U)| < 2\epsilon \quad \text{м.н.}$$

Але число  $\epsilon$  довільне, тому  $\mathcal{U}$  буде  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ .  $\square$

*Доведення теореми 2.* Розглянемо у просторі  $T$  послідовність  $(V_i)$  неперетинних борелівських множин, кожна діаметру  $< \delta$ , об'єднання яких становить увесь простір. Тоді зрозуміло, що для кожного  $U \subset \mathcal{U}$  існує мінімальна підпослідовність  $\{V_i : i \in I_U\}$  така, що

$$U \subset U' = \cup_{i \in I_U} V_i,$$

причому без однієї з множин  $V_i$  останнє включення вже не виконується.

Позначимо через  $I_\partial \subset I_U$  номери множин, які перетинають межу множини  $U$ . З геометричних міркувань ясно, що

$$U' \setminus U \subset \cup_{i \in I_\partial} V_i \subset \partial_\delta(U).$$

Тоді, згідно з наслідком 2,  $\mathcal{U}' = \{U'\}$  буде  $GC$ -класом для розподілу  $\mathbb{P}$ .  $\square$

**Приклад.** Наведемо ще приклад застосування  $\mathbb{P}$ -одностайної неперервності. Через  $B^*$  позначатимемо спряжений до банахового простору  $B$ , а через  $S^*$  – одиничну сферу простору  $B^*$ . Через  $\mathcal{H}$  позначатимемо клас усіх замкнених півпросторів простору  $B$ , тобто множин вигляду  $H_{x^*t} = \{x \in B : x^*(x) \leq t\}$ ,  $x^* \in S^*$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Очевидно,  $\partial_\delta(H_{x^*t}) = \{x \in B : |x^*(x) - t| \leq \delta\}$ .

**Твердження 1.** *Нехай  $X$  – нормально розподілений випадковий елемент зі значеннями в банаховому просторі  $B$ ,  $D \subset S^*$  і  $\alpha > 0$ . Клас  $\{H_{x^*t} : x^* \in D, \mathbb{D}x^*(X) \geq \alpha\}$  буде  $\mathbb{P}$ -одностайно неперервним.*

*Доведення* зовсім просте. Нехай  $\gamma$  – стандартна нормальна в.в., а  $\Phi(t)$  – її функція розподілу. Тоді для кожного  $t$

$$\Phi(t + \delta) - \Phi(t - \delta) \leq \Phi(\delta) - \Phi(-\delta) \leq \sqrt{2/\pi} \delta.$$

Звідси, враховуючи, що для кожного  $x^* \in B$  маємо  $x^*(X) = \sqrt{\mathbb{D}x^*(X)}\gamma + \mathbb{E}x^*(X)$ , негайно отримуємо  $\mathbb{P}$ -одностайну неперервність.  $\square$

Вибираючи у просторі  $B = C[0, 1]$  поточкові функціонали, дістаємо

**Наслідок 3.** *Нехай  $X = (X(s), s \in [0, 1])$  – нормально розподілений неперервний випадковий процес з  $\mathbb{D}X(s) \geq \alpha > 0$  (наприклад,  $X$  – стаціонарний процес),  $(X_i)$  – незалежні копії  $X$ . Тоді виконується теорема Глівенка-Кантеллі: м.н.*

$$\sup_{s \in [0, 1], t \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i(s) < t) - \mathbb{Q}\{X(s) < t\} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

*Зауваження 2.* Твердження 1 залишається вірним і для довільно розподілених в.в. при умові: для кожного  $x^* \in D$  в.в.  $x^*(X)$  має рівномірно обмежену симетричну відносно 0 щільність, монотонну на  $(0, \infty)$ .

Відповідно, наслідок 3 буде вірним для довільних неперервних випадкових процесів, для яких щільність розподілу в.в.  $X(s)$  задовольняє аналогічну умову.

- [1] S. Ahmad, *Sur le théorème de Glivenko-Cantelli*// C. R. Acad. Sci., Paris. – 1961. – **252**. – P. 1413–1417.
- [2] P. Billingsley, F. Topsøe, *Uniformity in weak convergence*// Z. Wahrschein. verw. Geb. – 1967. – **7**. – P. 1–16.
- [3] F.P. Cantelli, *Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita*// Ist. Ital. Attuary. – 1933. – **4**. – P. 421–424.
- [4] R. Fortet, E. Mourier, *Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique*// Ann. Sci. École Norm. Sup. – 1953. – 3<sup>e</sup> sér, **70**. – P. 267–285.
- [5] P. Gaenssler[Gänssler], W. Stute, *Empirical processes: a survey of results for independent and identically distributed random variables*// Annals of Probab. – 1979. – **7**. – P. 193–243.
- [6] V. Glivenko, *Sulla determinazione empirica della leggi di probabilità*// Giorn. Ist. Ital. Attuari. – 1933. – **4**. – P. 92–99.
- [7] J. Hoffmann-Jørgensen, *The Glivenko-Cantelli theorem and the Ranga Rao theorem*// Functional analysis, VI (Dubrovnik, 1999), P. 65–290, Various Publ. Ser. (Aarhus), 45, Univ. Aarhus, Aarhus, 2000.
- [8] R. Ranga Rao[Rao], *Generalization of a theorem of Pólya and applications*// Ann. Math. Statist. – 1960. – **31**. – P. 241 (abstract).
- [9] R. Ranga Rao[Rao], *Relation between weak and uniform convergence of measures with applications*// Ann. Math. Statistics. – 1962. – **33**. – P. 659–680.
- [10] В.В. Сагонов, *К теореме Гливенко-Кантелли*// Теория вероятн. и ее примен. – 1963. – **8**, №3. – С. 299–303.
- [11] H. Scheffé, *A useful convergence theorem for probability distributions*// Ann. Math. Statist. – 1947. – **18**. – P. 434–438.
- [12] M. Talagrand, *The Glivenko-Cantelli problem* // Annals of Probab. – 1987. – **15**. – P. 837–870.
- [13] M. Talagrand, *The Glivenko-Cantelli problem, ten years later*// J. Theoret. Probab. – 1996. – **9**. – P. 371–384.
- [14] F. Topsøe, *On the connection between P-continuity and P-uniformity in weak convergence*// Теория вероятн. и ее примен. – 1967. – **12**, №2. – С. 279–288.
- [15] F. Topsøe, *On the Glivenko-Cantelli theorem*// Z. Wahrschein. verw. Geb. – 1970. – **14**. – P. 239–250.

- [16] V.S. Varadarajan, *On the convergence of sample probability distributions*// Sankyā. – 1958. – **19**. – P. 23–26.
- [17] J. Wolfowitz, *Generalization of the theorem of Glivenko-Cantelli*// Ann. Math. Statistics. – 1954. – **25**. – P. 131-138.
- [18] J. Wolfowitz, *Convergence of the empiric distribution function on half-spaces*// Contribution to probability and statistics. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif. – 1960. P. 504–507.

## REMARKS ON THE GLIVENKO-CANTELLI THEOREM IN A SEPARABLE METRIC SPACE

*Ivan MATSAK<sup>1</sup>, Anatolij PLICHKO<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Taras Shevchenko National University of Kyiv  
2/6, Academician Glushkov Avenue, Kyiv 03127, Ukraine

<sup>2</sup> Cracow University of Technology  
ul. Warszawska 24, Cracow 31-155, Poland

We give a proof of the Glivenko-Cantelli theorem for separable metric spaces. It is proved also the following statement: Let  $X$  be a random element in a separable metric space  $T$ ,  $\mathcal{U}$  be an arbitrary class of Borel sets in  $T$ ,  $\delta > 0$ , and  $\partial_\delta(U)$  denotes the  $\delta$ -neighborhood of the border  $\partial U$  of a set  $U$ . Then there exists a system of Borel sets  $\mathcal{U}'$  with the condition:  $\forall U \in \mathcal{U} \quad \exists U' \in \mathcal{U}', \quad U \subset U' : U' \setminus U \subset \partial_\delta(U)$ , for which the Glivenko-Cantelli theorem is valid.