Математика сегодня
Volume 00, Number 0, Pages 000–000
S 0002-9939(XX)0000-0

ПРО ДВА ПИТАННЯ Б. М. ПШЕНИЧНОГО ЩОДО ВИБОРУ НЕПЕРЕРВНОГО ЛІНІЙНОГО СЕЛЕКТОРА

А. М. ПЛІЧКО

Анотація. Ми даємо відповідь на питання Б. М. Пшеничного щодо вибору неперервного лінійного селектора, що колись були поставлені в цьому збірнику.

Мова йтиме про два питання замітки [3]. Відповіді були отримані автором близько 1989 р. Інформація була послана Б. М. Пшеничному, але до публікації якось не дійшло. Питання виникли при розв'язуванні екстремальних задач. Оскільки у відповідях істотно використовуються (не)доповнювальні підпростори, нам видається доцільним опублікувати їх як додаток до попередньої статті [2]. Аргументація елементарна і не становить жодної проблеми для студента, що зміг прочитати [2]. Ми зберігаємо позначення й терміни замітки [3], хоч вони не зовсім збігаються зі вживаними в [2].

Питання 1. *Нехай X, Y – банахові простори, $L \subset X \times Y$ – лінійний підпростір, $Pr_X L = X$, $l(x) = \{y : (x, y) \in L\}$,*

(1) підпростір $l(0)$ замкнений і

(2) існує $c > 0$ таке, що для всякого $x \in X$

$$\inf\{\|y\| : y \in l(x)\} \le c\|x\|.$$

Чи існує лінійний неперервний оператор $P : X \to Y$, графік якого лежить в L?

Якщо простір Y гільбертів, то відповідь позитивна (доведіть!) Відповідь – не завжди.

Приклад 1. *Нехай Z – замкнений підпростір банахового простору Y, $X = Y/Z$, $L = \{(\hat{y}, y) : \hat{y} \in X,\ y \in \hat{y}\}$ (графік фактор-відображення) $Y \to Y/Z$.*

Умови (1), (2) для L виконані з $c = 1$. Тоді існування лінійного неперервного оператора $P : X \to Y$, графік якого лежить в L, еквівалентне доповнювальності Z в Y. Численні приклади недоповнювальних підпросторів є в [1]; більше того, якщо Y не ізоморфний до гільбертового простору, то він має недоповнювальний підпростір.

Означення 1. Якщо L – лінійний підпростір банахового простору X, то множина M *відносно відкрита* в L, якщо $M = L \cap M_0$, де M_0 – відкрита множина в X. Нехай тепер L_1 і L_2 – лінійні підпростори в X. Якщо множина

$$M_1 + M_2 := \{x_1 + x_2 : x_i \in M_i, i = 1, 2\}$$

Date: 27 серпня 2007 р.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46B20; secondary 46B30.

відкрита в X для будь-яких M_1, M_2 відносно відкритих в L_1 і L_2 відповідно, то кажуть, що L_1 і L_2 *знаходяться в загальному положенні.*

Питання 2. *Нехай лінійні підпростори L_1, L_2 простору Банаха X, $L_1 + L_2 = X$ знаходяться в загальному положенні. Чи існують такі лінійні неперервні оператори $P_1 : X \to L_1$, $P_2 : X \to L_2$, що $x = P_1x + P_2x$ для кожного X?*

Відповідь – не завжди.

Приклад 2. *Нехай E – банахів простір і F – його недоповнювальний замкнений підпростір. Покладемо $Z = \{(f, -f) : f \in F\} \subset E \times E$, $X = (E \times E)/Z$, $L_1 = (E \times 0)/Z$, $L_2 = ((0 \times E)/Z$.*

Тоді $L_1 + L_2 = X$ і L_1, L_2 знаходяться в загальному положенні (замкнені підпростори, сума яких дає увесь простір Банаха, завжди знаходяться в загальному положенні). Крім того, L_1 і L_2 ізоморфні E, а $Y = L_1 \cap L_2$ ізоморфний F. Розглянемо оператор $+ : L_1 \times L_2 \to X$, $+ : (l_1, l_2) \to l_1 + l_2$. Якби існували згадані оператори P_1, P_2, то це означало б, що ядро оператора $+$ має доповнення. Цим ядром є $\{(y, -y) : y \in Y\}$. Тому б існувало і доповнення F в E, чого нема.

Література

1. Кадец М. И., Митягин Б. С. Дополняемые подпространства в банахових пространствах // УМН - 1973. – 28, №. 6. – С. 77–95.
2. Попов М. М. Доповнювальні підпростори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика Сегодня, Киев, Вища Школа, 2007. – С. –.
3. Пшеничний Б. Н. О задаче выбора непрерывного линейного селектора // Математика Сегодня, Киев, Вища Школа, 1987. – С. 157–159.

Department of Mathematics, Cracow University of Technology, ul. Warszawska 24, 31-155 Cracow Poland

E-mail address: aplichko@usk.pk.edu.pl